

令和 3 年 5 月 16 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05282

研究課題名(和文)ベルグマン空間に対するGleason問題の可解性と積分作用素解析への応用

研究課題名(英文)Solvability of the Gleason problem for the Bergman space and its application to analysis of integral operators

研究代表者

植木 誠一郎(Ueki, Seiichiro)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：70512408

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：解析関数空間に作用するCesaro型積分作用素および関連する線形作用素の性質を、作用素を構成する関数・写像の定義領域における境界挙動で与えられる函数論的な性質を利用して特徴づける研究を行なった。特徴づけの条件を表現するためにGleason問題の可解性とその解の積分表現を明確にすること、近似の手法を確立するためにdilated functionによるノルム近似のオーダー評価の導出および微分作用による同値なノルム評価不等式の導出を行なった。Fock型空間に作用する積分作用素、乗法作用素、微分作用素の特徴づけ、Privalov型空間の等距離写像の構造解析についての研究成果も得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

解析関数空間に作用する線形作用素の性質を解析するために取られる手法は、関数空間に依存する位相解析的な同値条件に読み替えることが主流である。しかしながら、Bergman型空間に作用する積分作用素の解析では試験関数の構成が難しくこのような手法が通用しない状況が現れる。この点を克服するための新しいアプローチがBerezin型変換の解析と同値ノルムによる評価であり、これらを実現するためにGleason問題の可解性とその解の表現の応用を試みたのが本研究である。Gleason問題の応用による線形作用素の研究はこれまでに着手されていないものであるため、今後の発展が大いに期待される研究であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：The properties of Cesaro-type integral operators and related linear operators acting on analytic function spaces are characterized by using the functional-theoretic properties given by the boundary behavior in the domain of the functions and mappings constituting the operators. In order to express the conditions for the characterization, we clarify the solvability of the Gleason problem and the integral representation of its solution, and to establish the approximation method, we derive the order evaluation of the norm approximation by the dilated function and the norm evaluation inequality with the equivalence by the differential operator. The characterization of integral, multiplicative, and differential operators acting on Fock-type spaces, and the structural analysis of equidistant mappings in Privalov-type spaces were also studied.

研究分野：解析関数空間論

キーワード：Bergman空間 Zygmund空間 Privalov空間 Fock空間 Gleason問題 積分作用素 等距離写像

### 1. 研究開始当初の背景

解析関数空間論における主要な研究テーマの一つとして、「与えられた関数  $g$  と写像 から構成される線形作用素の有界性などの基本的な性質を、構成因子である  $g$  と の持つ函数論的な性質を用いて特徴づけることは可能か？」という特徴づけの問題がある。N 次元複素ユークリッド空間の領域上の解析関数  $g$  と解析的な写像 に対して定義される 2 種類の Riemann-Stieltjes 型の積分作用素を考える。解析関数空間上の Riemann-Stieltjes 型積分の性質を構成因子である  $g$  と の備える性質を通して解析する研究は、解析関数空間上で定義される線形作用素研究の立場から見ると極めて自然な着想といえる。これまでに用いられてきた解析関数空間上の線形作用素の解析手法は、作用素の性質を関数空間に依存する位相解析的な同値条件に読みかえることであった。この方法だと作用素を構成する関数や写像の持つ性質の関与が不明瞭なままであり、作用素の挙動を具体例を通して観察するには不向きである。また、試験関数のノルム評価を通して、作用素に付随する関数解析学的な量を解析することもこれまでのたくさんの先行研究で行われているが、植木・Stevic の先行研究において中心的な役割を果たした試験関数の構成方法が、一般的な重み関数により定義される Bergman 空間の場合には通用しないことが既に判明していた。

本研究の構想を実現するためには、積分作用素に対する Berezin 型変換を導入すること、Berezin 型変換の挙動と作用素に付随する量を関連づける評価不等式を確立することの 2 点が必要不可欠であると考えられる。さらに、Bergman 空間の同値ノルム評価の導出に Gleason 問題の可解性とその解の表現を応用することで、Bergman 直交射影の挙動や再生核関数の境界挙動の解析といった調和関数の手法を取り入れることを可能にする、積分作用素の解析のみならず、解析関数空間上の線形作用素を解析するための基礎理論の研究にも通用する新しいアプローチの方法を提示する必要があると考えられる。

### 2. 研究の目的

Riemann-Stieltjes 積分や Cesaro 型積分の Bergman 空間などの解析関数空間への作用を特徴付ける条件を、積分作用素を構成する解析関数と写像が持つ増大度、領域の境界における挙動などの函数論的な性質を通して明らかにすることである。この種の積分作用素や合成作用素の解析に Gleason 問題の可解性を応用し、Berezin 型変換の挙動と作用素ノルム を結びつける調和解析の手法を取り入れることで、

- 1) Berezin 型変換と積分作用素のノルムとの相互関係を明らかにする、
- 2) 積分作用素の構成因子の増大度や境界挙動が Berezin 型変換の挙動にどのような影響を及ぼすのかを解析する

ことで、積分作用素、合成作用素の性質と作用素構成因子の函数論的性質との相互作用の仕方を明らかにする。

### 3. 研究の方法

本研究課題の申請時に考案していた研究の方法は次の三つの研究を進めるものであった：

- 1) Bergman 直交射影と Gleason 問題の可解性により、Littlewood-Paley 公式を導出する。
- 2) 積分作用素の像関数の挙動、Berezin 型変換の挙動、作用素構成因子の持つ函数論的性質、これら三つの相互関係を明らかにする評価不等式を確立する。
- 3) 積分作用素の有界性やコンパクト性、等距離性などの作用素の性質を特徴づける条件を Berezin 型変換の挙動もしくは作用素構成因子の函数論的性質で記述する。

これらは独立したテーマではなく各々が密接に結びついているので、ある程度は並行して研究を進めることを想定していた。まず、積分作用素に対する Berezin 型変換の導入・構成を可能にするために Bergman 空間の再生核関数をベースに構成される試験関数の積分作用素による像の挙動を Bergman 空間のオリジナルノルムを利用して調べる。そのために、Bergman 空間の双対性を実現する線形汎関数の表現と Bergman 核関数の挙動が必要となる。また、Bergman 空間のノルム評価を調べるには、Sobolev ノルムや勾配ベクトルを用いた同値ノルムが有効であると考えられる。この同値ノルムは Littlewood-Paley 公式とも呼ばれ、この公式を導出するのに Gleason 問題の解を与える線形作用素の表現が重要な役割を果たす。そして、Bergman 空間に対する Gleason 問題の可解性を探るための道具が Bergman 直交射影の有界性である。したがって、上述の 1) のテーマの研究を進めるために、

- a) Bergman 空間に対する双対性定理の確立と Bergman 核関数の挙動を解析する
- b) 双対性定理を利用して Bergman 直交射影の有界性と再生表示公式を導出し、Gleason 問題の可解性とその解の表示式を探る
- c) 高階導関数や勾配ベクトル (gradient、invariant gradient) を利用する同値ノルムを見出す

と段階を経ることを考案した。

これらの研究が順調に進めば、Bergman 空間の基礎的な性質が準備されるので、積分作用素を解析する 2)、3) の計画へ移行することが可能となる。Berezin 型変換を用いてノルムを評価するためには、正則関数の同次多項式展開から定まる射影作用素によるノルム近似の方法を想定している。このノルム近似の手法は正則関数の特性を活かしたものであり、Hilbert 空間における正規直系の代用となるものである。このノルム近似に使うノルムはどのようにして入れられるものが最適なのか未知数であるが、古典的な Bergman 空間と同様に、Bekolle weight 関数による Bergman 空間にも自然に対応する道具が導出されることが想定される。一定のノルム評価が得られれば、作用素に対する作用素ノルム・本質ノルムに対する評価不等式の導出が可能となる。このような評価不等式の確立を通して、Berezin 型変換の挙動および作用素構成因子のもつ境界挙動などの函数論的性質との結びつきを解析する。

#### 4. 研究成果

今回の研究で得られた成果は大きく分けて次の 5 つである：

- (1) Zygmund 空間の高階微分作用素による特徴づけと Gleason 問題の可解性
- (2) Bergman 空間に対する同値ノルム評価不等式の導出
- (3) Bergman 空間における dilated function によるノルム近似のオーダー解析
- (4) Privalov 型関数空間における等距離写像の構造解析
- (5) 解析的 Besov 空間と Bloch 型空間の間に作用する合成作用素による差作用素の特徴づけ

(1) では、単位球上で定義される Zygmund 空間に対する高階微分作用素を利用した特徴づけと Gleason 問題の可解性についての研究を行なった。N 変数の正則関数に対する微分作用素として正則関数の同次多項式展開から定まる radial derivative を利用する特徴づけを考察し、radial derivative 作用素を m 回反復作用させると重み関数のオーダーが m-1 乗に変化することがわかった。さらに、この m 階微分の p-乗積分平均と重みつき Carleson 測度によっても Zygmund 空間が特徴づけられることを明らかにした。また、Zygmund 空間の関数に対する再生公式を応用して、Gleason 問題の可解性を調べた。結果は、Zygmund 空間に対して Gleason 問題は解けて、その解は Bergman 核関数を利用して得られるというものである。

(2) では、admissible weight 関数による Bergman 空間に対する特徴づける条件を、gradient、invariant gradient、radial derivative の 3 種類の微分作用素を利用して表せるかどうかを考察している。ポテンシャル論の手法である Riesz 測度と Riesz の分解定理、slice function に対する積分公式を応用して、Bergman 空間のノルムに対する同値な評価不等式を確立することで Bergman 空間を定義する可積分条件と同値な 3 つの条件を見出した。

(3) では、Bekolle weight 関数による Bergman 空間における dilated function によるノルム近似のオーダーと導関数の p-乗平均のオーダーについての評価を解析した。Hardy 空間の場合に現れる、境界上の積分に関する平均 Lipschitz 条件を円板上の積分に関する平均 Lipschitz 条件に焼き直し、dilated function によるノルム近似のオーダー、導関数の p-乗平均のオーダーが何も平均 Lipschitz 条件と同値になることを証明した。また、Bergman 空間に関係の深い Bloch 空間、Zygmund 空間に関しても同様のオーダー評価が可能であることを証明した。

(4) では、Privalov 型空間の等距離写像の構造について研究した。Hardy-Orlicz 空間の一つである Privalov 空間に導関数が属するような解析関数空間を導入した。まず、線形性を仮定した等距離写像の構造がどうなるかを調べ、それが Cesaro 型積分に類似の積分作用素で表現されることを明らかにした。線形性に全射性を仮定すると、より単純な形で表現されることもわかった。また、このような解析関数空間は元の関数も Privalov 空間に属することがわかるので、自然と多元環の構造を備える。このことに注目して、線形性ではなく乗法性を仮定した全射等距離写像の構造についても研究を進めた。結果は、乗法性 + 全射性から線形性を導くことができ、k のような性質を持つ等距離写像は本質的に回転移動に限られることを証明した。

(5) では、解析的 Besov 空間と一般の重み関数による Bloch 型空間の間に作用する二つの合成作用素から定まる差作用素の有界性とコンパクト性の特徴づけ問題を考察した。上述の (1) ~ (3) の研究で得られた様々な評価に関する結果の一つの応用として、新しい試験関数の構成を試みた。積分作用素のような複雑な作用素を考える前に、より単純な合成作用素に適用することで、試験関数の構成方法としての妥当性を評価した。作用素の特徴づけには定義領域である単位円板における双曲的幾何に関する函数論的性質が必要であることを証明した。なお、この結果については然るべき雑誌に投稿しており、現在、査読中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sei-Ichiro Ueki	4. 巻 92
2. 論文標題 Isometries of Analytic Function Spaces with $N_p$ -Derivative	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Integral Equations and Operator Theory	6. 最初と最後の頁 20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00020-020-02578-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ajay K. Sharma, Sei-Ichiro Ueki	4. 巻 50
2. 論文標題 Mean Lipschitz conditions and growth of area integral means of functions in Bergman spaces with an admissible Bekolle weight	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Rocky Mountain Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 693--706
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1216/rmj.2020.50.693	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Sei-Ichiro Ueki	4. 巻 20
2. 論文標題 Characterizations of admissible weighted Bergman spaces on the unit ball	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Computational Methods and Function Theory	6. 最初と最後の頁 95-109
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40315-020-00299-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 植木誠一郎	4. 巻 2125
2. 論文標題 Multiplicative linear functional on the Zygmund F-algebra	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 68-71
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 植木誠一郎	4. 巻 2118
2. 論文標題 Isometries of the Zygmund F-algebra	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 26-32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sei-Ichiro Ueki	4. 巻 28
2. 論文標題 Characterizations and Gleason's problem for the Zygmund space on the unit ball	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Indagationes Mathematicae	6. 最初と最後の頁 962-975
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.indag.2017.06.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Isometries of the Novinger-Oberlin type Privalov space
3. 学会等名 2020日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 ハーディ空間に対する補間数列
3. 学会等名 Real, Complex and Functional Analysis Seminar
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Novinger-Oberlin型Privalov空間の等距離写像
3. 学会等名 様々な関数空間上の等距離写像の研究
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Isometries of Zygmund F-algebra
3. 学会等名 University of Jammu 談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Isometries of Zygmund F-algebra
3. 学会等名 National Conference on Recent Advances in Mathematics RAM-2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Mean Lipschitz conditions and growth of area integral means of functions in Bergman spaces
3. 学会等名 Conference on Function Algebra 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Multiplicative linear functional on the Zygmund F-algebra
3. 学会等名 保存問題としての等距離写像の研究とその周辺 RIMS共同研究（公開型）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Zygmund F-algebra上の乗法的線形汎関数
3. 学会等名 第58回関東作用素論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Fock型空間に対するequivalent normと積分作用素解析への応用
3. 学会等名 作用素環・作用素環論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 植木誠一郎
2. 発表標題 Isometries of the Zygmund F-algebra
3. 学会等名 等距離写像理論と保存問題の多様な視点からの研究
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------