

令和 4 年 6 月 2 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05284

研究課題名(和文)多様体上の解析学の研究

研究課題名(英文)Study of the Analysis on Manifolds

研究代表者

古谷 賢朗 (Furutani, Kenro)

大阪市立大学・数学研究所・特別研究員

研究者番号：70112901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Gromoll-Meyer exotic sphereに余次元3のsub-Riemann構造が存在することを示した。(2) Sub-Riemannの場合のMaslov 量子化条件が有効かどうかを確認し、証明を得た。(3) Clifford代数に付随したベキ零Lie環の完全分類と自己同型群を全て決定した。(4) またこのベキ零多様体のsub-Laplacianのspectral zeta関数を決定し、その留数を計算し、Riemannの場合との違いを見出した。(5) Cayley射影平面上のBargmann型の変換を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の対象である幾何構造(= sub-Riemann構造)と付随する劣楕円型作用素(= sub-Laplacian)の大域的な研究の歴史はそう古くはないので、以前の研究からも引き続き研究対象がどの辺にあるのかの研究も継続し、豊富な例が多方面にあることが徐々に分かって来た。特にこの期間の研究で具体例として重要な、Clifford代数に付随するベキ零Lie環(群)についての基礎的構造の研究はほぼ完成し、更に今後続けるべく多くの問題、例えば本研究はコロナで延長期であるので既に次期の科研費研究で同時に、この群の一樣離散部分群の研究を始め、それはspectral zeta関数の研究にも繋がっている。

研究成果の概要(英文)：(1) We proved an existence of a sub-Riemannian structure of co-dimension 3 on the Gromoll-Meyer exotic sphere. (2) We made clear that the Maslov quantization condition works also for sub-Riemannian cases. (3) We classified Lie algebras attached to Clifford algebras and determined all their automorphism groups. (4) We determine the spectral zeta functions for these class of nil-manifolds and also find a difference from the Riemannian case on the behavior of residues. (5) We constructed a Bargmann type transformation on the Cayley projective plane.

研究分野：大域解析学

キーワード：Clifford module pseudo H-type Lie環(群) exotic sphere sub-Riemann構造 劣楕円型作用素 Fourier積分作用素 spectral zeta関数 Maslov 量子化条件

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

これまで多様体の幾何構造により定まる微分作用素の研究は楕円型作用素が研究の中心であり、Atiyah-Singer 指数定理に代表される作用素の楕円性の意味する解析的性質と幾何学的性質が相互に関連した多くの事柄が発見された。更に場の理論や整数論との関連 (*zeta determinant* の様な非局所的スペクトル不変量の研究等) も見い出され、今日も多くの分野との関連のもと深い研究が続いている。本研究はこの流れの中で、新たな解析学的幾何学的知見を求めて「劣楕円型微分作用素」の大域的な研究及び、その様な作用素の存在する多様体の幾何構造の解明を主目的とする。この構造 (= **sub-Riemann** 構造) は葉層構造の対極に位置し、接束にある部分束が存在し、そこに値を取るベクトル場の交換子積の繰り返しで接ベクトル全体が生成されるという性質で特徴づけられる。この性質を持つ部分束は完全非ホロノミックな部分束とよばれ、非自明な部分束の存在は自明でない。葉層構造は幾何学の問題として半世紀に亘り深く研究されているが、sub-Riemann 構造の研究も解析学と幾何学にまたがる今後更に発展可能なテーマである。Laplace-Beltrami 作用素は Riemann 計量に付随して自然に定義される。一方、本研究の中心的研究対象である「sub-Laplacian」は「sub-Riemann 構造」に付随して定義される 2 階の劣楕円型微分作用素である。両者の本質的違いは、後者は主表象が消えるところ (= 特性多様体) があり、そのままでは K-理論の枠組みでは扱えないが、解析的には少し弱い意味での a priori 評価式 (= 劣楕円性) が成り立つことで特徴づけられ、準楕円性はもちろんのこと Hilbert 空間における閉作用素としてのスペクトル構造は楕円型作用素の場合と同様に取扱える。Beals-Gaveau-Greiner はこの作用素が解析学的にも幾何学的にも興味ある研究対象であることを多くの結果として発表し (例えば、R. BEALS, B. GAVEAU, P. GREINER, *The Green Function of Model Step two hypoelliptic Operators and the Analysis of Certain Tangential Cauchy Riemannian Complexes*, Adv. in Math. **121**, 288-345(1996), *Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups*, J. Math. Pures Appl. **79**, 633-689(2000)), それらの影響のもと本申請代表者も論文「*Spectral Analysis and Geometry of a sub-Laplacian and related Grushin type operators*, W. Bauer, K. Furutani and C. Iwasaki, Trends in partial Differential Equations and Spectral Theory in "Advances in Partial Differential Equations", **211**, 183-290, Birkhäuser (2010)」でその後の研究の基礎となる多くの事柄を整理し、いくつかの方向に研究を展開中である。

2. 研究の目的

本研究は、前回の科研費研究の更なる発展として、多様体の幾何構造 (= sub-Riemann 構造) の研究とそれにより自然に定まる偏微分作用素 (= sub-Laplacian) の熱核、及びスペクトル構造の研究を主目標としていたが、コロナ禍令和 3 年度まで 2 年間延長して互いに関連するが大別して以下の研究を行う事を目的とした。

(1) Sub-Riemann 構造、Popp 測度の研究。いくつかの多様体にその構造の存在の証明と、劣楕円型作用素の大域的な研究。

(2) 本幾何構造を持つ多様体の典型的な例の一系列としての Clifford module に付随するベキ零 Lie 環 (群) の完全分類、自己同型群の決定、又そのベキ零多様体上の Laplacian と sub-Laplacian の spectral zeta 関数の研究。

(3) 幾何学的量子化による Cayley 射影平面上に Bargmann type 作用素の構成と Töplitz 作用素の研究。

3. 研究の方法

理論研究なので、主に同じ方面の研究をしている研究者との意見交換や問題点の指摘を受け、又先行研究の文献研究等を通じて、試行錯誤を積み重ね一步一步研究を進める。研究期間の内、コロナ

禍が始まるまでの前半はドイツとノルウェーに滞在し共同で問題を論じたが、後半以後はメールや zoom での意見アイデアの交換が主となりなかなか思うようには進めなかったが、時間的には融通が効いたことはポジティブにも考えられる。

研究の目的 (1) については 研究の目的 (2) の対象と共通するところもあるが、Hamilton-Jacobi method による sub-Laplacian の熱核の具体的構成と、Selberg trace formula の計算に従い、pseudo H-type nil-manifold の spectral zeta 関数について、その決定、特別な場合の留数を古典的な Riemann zeta 関数の整数点での値との関連を論じた。

研究の目的 (2) については、Clifford 代数は二次形式の符号 (r, s) に応じて特定の体上の行列環になり、その admissible module ごとに状況が異なるので、先ず符号に依らない共通する方法を見つけることに努め、このクラスの Lie 環のどのような特徴を見れば分類が出来るのかを色々な場合の試行錯誤の結果、それぞれについて互いに可換な正の involution の maximal system を見出し、Bott 周期性に基づき高次元の場合も低次元の基本クラスに色々なことが帰着出来ることを見出した。又、その方法により全ての場合の自己同型群の決定も可能となった。

研究の目的 (3) については、複素 8 元数を 2 個の 2×2 の複素行列で表現し、Cayley 射影平面 $P^2 \circledast$ の punctured cotangent bundle $\cong T^*P^2 \circledast \setminus \{0\}$ を複素 27 次元空間内の 2 次曲面と実現し、その正則余接束が正則自明になる様子を具体的に実現することにより研究を進めた。

4. 研究成果

(1) Gromoll-Meyer exotic sphere Σ_{GM}^7 に余次元 3 の sub-Riemann 構造が存在することを示した。これは 7 次元異種球面の中でも、主束 $\Sigma_{GM}^7 \rightarrow S^4$ の全空間、又主束 $Sp(2) \rightarrow \Sigma_{GM}^7$ の低空間ともなり、この構造を用いてある接続を定義出来それが 2-step の sub-Riemann 構造を与えていることを示した。又、主束の接続が sub-Riemann 構造を与えている場合に Popp 測度と低空間の測度との関係を詳しく調べた。ここでは主として 2-step の場合を扱ったが higher step の一般論を論じるのは今後の研究になる (5. 主な発表論文等の [10], [9])。

(2) Sub-Riemann の場合の Maslov 量子化条件が有効かどうかを確認した。この問題は量子力学誕生の古くからの現象を扱っているが、当初は当然楕円型作用素のみが対象であったが、劣楕円型でも付加条件のもと、成り立つと長い間考えていたが、周辺の理解を進め、Riemann の場合の証明を詳しく解析し、sub-Laplacian が特性多様体を持っていてもそれをうまく回避できれば正しいことを明確にした。実際 Maslov 量子化条件を満たす Lagrangian submanifold が特性多様体と交わらなければ、Laplacian の場合と同じように $S^1 \times M$ の余接束に Fourier 積分作用素の canonical relation を与える conic Lagrangian submanifold を構成出来、得たい結果が導かれる。

最初のある意味自明な具体例としては、Riemann submersion の水平的な部分束が bracket generating で、低空間に Riemann の場合の Maslov 量子化条件を満たす Lagrangian sub-manifold が存在すれば全空間の余接束に必要な Lagrangian submanifold の存在が言える。この場合の本質的な内容は構成した二つの Fourier 積分作用素が Riemann submersion を通じて関連していることである。自明でない具体例の研究は今後の研究であるが、もっと一般的に余接束内の Lagrangian submanifold の様々な構成の問題として次期の科研費研究で継続予定である (5. 欄の [8], [7], [4])。

(3) Clifford 代数に付随したベキ零 Lie 環の完全分類と自己同型群を全て決定した。この研究は既に約 8 年前から遡るが、当初は一樣離散部分群の存在証明から始め一応の結果を得たが、ある時点で分類問題を先ず取り組むべきであると気がついた。結果として、Clifford 作用の互いに可換な正の involution の極大系が重要な役割を果たしていることに気がつき、完全分類と自己同型群の決定を完成することが出来た。この視点から見れば一樣離散部分群の存在そのものはほぼ自明になったが、全ての一樣離散部分群の構成と分類は今後の研究として残っている。更に、Bott 周期性が分類と自己同型群の決定にも有効であることにも気がついた。

下の表は Clifford 代数の符号 (r, s) が小さい時の pseudo H -type Lie 環 (群) の自己同型群の自明でない部分群を表す。他の指数 (r, s) に対する場合は、 $(r, s) = (r' + 8, s)$, $(r, s) = (r, s' + 8)$ 又は $(r, s) = (r' + 4, s' + 4)$ の関係にある小さな指数 (r', s) , (r, s') 又は (r', s') 場合から Bott 周期性に従い決まる (5. 欄の [1], [5], [6], [11], [12])。

(4) 又、このベキ零多様体の sub-Laplacian の spectral zeta 関数を Clifford 作用で不変な一様離散部分群に対して決定し、一部についてはその留数を計算し、Riemann の場合との違いを見出した。特別なケースについては留数が Riemann zeta 関数の整数点での値の交代和で書かれ、この spectral zeta 関数が古典的な問題とも関係することも分かり、今後研究すべき事柄の一つが明確になって来た (5. 欄の [2], [3])。

(5) Cayley 射影平面 $P^2\mathbb{O}$ の余接束 $\setminus\{0\}$ (= punctured cotangent bundle $T_0^*P^2\mathbb{O}$) を複素 27 次元 ユークリッド空間の余次元 11 の 2 次曲面として実現し、自然な Kähler 構造が入っている事は既に本研究代表者が 20 年あまり前に証明をしたが、本研究の結果、更に Calabi-Yau 構造もあることが分かった。そのためには Calabi-Yau 構造を与える各点で消えない正則な 16-form を具体的に記述する必要があるが、複素 8 元数 (8 元数体を複素化したもの) を 2×2 の二つの複素行列で表現することにより $T_0^*P^2\mathbb{O}$ に好都合な正則座標近傍系を導入することが出来、更に F_4 群作用で不変であることも示した。これらを用いて古典的な場合に対応する Fock 空間の系列の構成と、それらから Cayley 射影平面上の 2 乗可積分関数の空間への変換 (= Bargmann type transformation) を構成し、長年懸案だった当初の目的は完全に果たせた (Kurando Baba, Kenro Furutani, *Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane*, 62 page, March 2022, Advance Publication in the Journal of the Mathematical Society of Japan)。これらの結果の一つの系として、この Fock 空間は再生核を持つ Hilbert 空間であることまでは分かった。この再生核と超幾何関数が関係するようにも見えるが、それらは Töplitz 作用素の研究と共に次期の科研費による研究の一つの問題である。

(3) の結果の表

8	$GL(p, \mathbb{R})$				
7	$O(p, p, \mathbb{R})$	$U(p, p)$	$Sp(p, p)$	$Sp(p, q) \times Sp(p, q)$	
6	$O(2p, \mathbb{C})$	$O^*(2p)$	$GL(p, \mathbb{H})$	$Sp(p, q)$	
5	$O^*(4p)$	$O^*(2p) \times O^*(2p)$	$O^*(2p)$	$U(p, q)$	
4	$GL(p, \mathbb{H})$	$O^*(2p)$	$O(p, \mathbb{C})$	$O(p, q, \mathbb{R})$	$GL(p, \mathbb{R})$
3	$Sp(p, p)$	$U(p, p)$	$O(p, p, \mathbb{R})$	$O(p, q, \mathbb{R}) \times O(p, q, \mathbb{R})$	$O(p, p)$
2	$Sp(2, \mathbb{C})$	$Sp(2p, \mathbb{R})$	$GL(2p, \mathbb{R})$	$O(2p, 2q, \mathbb{R})$	$O(2p, \mathbb{C})$
1	$Sp(2p, \mathbb{R})$	$Sp(2p, \mathbb{R}) \times Sp(2p, \mathbb{R})$	$Sp(4p, \mathbb{R})$	$U(2p, 2q)$	$O^*(4p)$
0		$Sp(2p, \mathbb{R})$	$Sp(2p, \mathbb{C})$	$Sp(p, q)$	$GL(p, \mathbb{H})$
s/r	0	1	2	3	4

3	$U(p, p)$	$Sp(p, p)$	$Sp(p, q) \times Sp(p, q)$	
2	$O^*(2p)$	$GL(p, \mathbb{H})$	$Sp(p, q)$	
1	$O^*(2p) \times O^*(2p)$	$O^*(2p)$	$U(p, q)$	
0	$O^*(2p)$	$O(p, \mathbb{C})$	$O(p, q, \mathbb{R})$	$GL(p, \mathbb{R})$
s/r	5	6	7	8

(注) 表は、Basic class に対して minimal admissible module の p 個 (同型でないのが二つあるときは p 個と q 個) の直和で構成した pseudo H -type Lie 環の自己同型群の主要部分を表す。高次元の場合は Bott 周期性に従って決定される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件／うち国際共著 9件／うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Furutani Kenro, Markina Irina	4. 巻 568
2. 論文標題 Automorphism groups of pseudo H-type algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 91～138
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2020.09.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Wolfram Bauer, Kenro Furutani, Chisato Iwasaki and Abdellah Laaroussi	4. 巻 297
2. 論文標題 Spectral theory of a class of nilmanifolds attached to Clifford modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 557-583
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-020-02525-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Kenro Furutani	4. 巻 4-1
2. 論文標題 Residue of the spectral zeta function of a sub-Laplacian on a certain class of nilmanifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Analysis and Optimization	6. 最初と最後の頁 51-64
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kenro Furutani, Mitsuji Tamura	4. 巻 2-3
2. 論文標題 Riemann submersion and Maslov quantization condition	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applied Analysis and Optimization	6. 最初と最後の頁 373-401
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kenro Furutani, Irina Markina	4. 巻 202
2. 論文標題 Complete classification of pseudo H-type algebras:II	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 233-264
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-018-0411-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenro Furutani, Irina Markina, Mauricio Godoy Molina, Tohru Morimoto, Alexander Vasiliev	4. 巻 28
2. 論文標題 Lie algebras attached to Clifford modules and simple graded Lie algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Lie Theory	6. 最初と最後の頁 843-864
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenro Furutani & Mitsuji Tamura	4. 巻 1-3
2. 論文標題 Double submersions and Hamilton flows	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Applied Analysis and Optimization	6. 最初と最後の頁 381-400
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Wolfram Bauer, Kenro Furutani & Mitsuji Tamura	4. 巻 18
2. 論文標題 First Integrals of bi-characteristic curves of a sub-Laplacian and related Grushin type operators	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Non-linear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 893-917
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Wolfram Bauer, Kenro Furutani & Chisato Iwasaki	4. 巻 96
2. 論文標題 Sub-Riemannian structures in a principal bundle and their Popp measures	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 2390-2407
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00036811.2017.1333602	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Wolfram Bauer, Kenro Furutani & Chisato Iwasaki	4. 巻 53
2. 論文標題 A codimension 3 sub-Riemannian structure on Gromoll-Meyer exotic sphere	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 114-136
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.201705.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Christian Autenried, Kenro Furutani, Irina Markina, Alexander Vasiliev	4. 巻 18
2. 論文標題 Pseudo-metric 2-step nilpotent Lie algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Geometry	6. 最初と最後の頁 237 - 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/advgeom-2017-0051	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenro Furutani, Irina Markina	4. 巻 190
2. 論文標題 Complete classification of pseudo H-type Lie algebras:I	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 23 - 51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 20件 / うち国際学会 11件）

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3. 学会等名 Microlocal and Global Analysis, Interactions with Geometry at Potsdam University, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3. 学会等名 Himeji conference on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Complete classification of Lie algebras attached to Clifford modules and an application
3. 学会等名 信州大学topology seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Eigenvalue theorem for sub-Laplacians and Lagrangian submanifolds satisfying Maslov quantization condition
3. 学会等名 2019 NCTS International Workshop on Geometric and Harmonic Analysis at National Taiwan University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Weyl-type law for a sub-Laplacian
3. 学会等名 International Workshop on Applied Analysis and Optimization 2019 at China Medical University, Taichung, Taiwan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Complete classification of nilpotent Lie algebras attached to a certain kind of Clifford modules and an application
3. 学会等名 広島大学 Topology-Geometry seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Eigenvalue theorem for sub-Laplacian and Lagrangian submanifolds satisfying Maslov quantization condition
3. 学会等名 Geometry and Mathematical Physics seminar at Copenhagen university, Denmark (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Eigenvalue theorem for sub-Laplacian and behavior of Lagrangian submanifolds under submersion
3. 学会等名 Workshop Analysis and PDE, Leibniz University at Hannover, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 From elliptic operators to sub-elliptic operators
3. 学会等名 Memorial workshop at Kyoto University for late professor H. Yoshizawa (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Lie algebras attached to a class of Clifford modules; existence of lattices, their classification and automorphism groups
3. 学会等名 立命館大学幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Complete classification of pseudo H-type algebras and an application to Kac's problem with respect to Laplacian and sub-Laplacian
3. 学会等名 研究集会：多様体上の微分方程式 at 金沢大学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Riemann submersion and Maslov quantization condition
3. 学会等名 金沢大学数理学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Riemann submersion and Maslov quantization condition
3. 学会等名 2018 Naha Workshop on Mathematical Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Submersion and Maslov quantization condition
3. 学会等名 2018 IWAAO at China Medical University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Automorphism groups of pseudo H-type groups
3. 学会等名 2018 NCTS Geometric and Harmonic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Geometry and Analysis of non-holonomic structure
3. 学会等名 静岡大学複素解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Complete classification of pseudo H-type algebras and an application
3. 学会等名 微分方程式と幾何学、立命館大学研究集会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Sub-Riemannian structures in a principal bundle and their Popp measures
3. 学会等名 2017 International Workshop on Applied Analysis and Optimization, China medical university, Taichung, Taiwan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kenro Furutani
2. 発表標題 Complete classification of pseudo H-type algebras and an application
3. 学会等名 2017 NCTS International Workshop on Harmonic Analysis and Geometric Analysis, National Taiwan university, Taipei, Taiwan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 古谷賢朗
2. 発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3. 学会等名 立命館大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	岩崎 千里 (Iwasaki Chisato)	兵庫県立大学・物質科学研究科・名誉教授 (24506)	
研究協力者	マルキナ イリナ (Markina Irina)	ベルゲン大学・教授	
研究協力者	バウアー オルフラム (Bauer Wolfram)	ハノーバー大学・教授	
研究協力者	バシリエフ アレクサンダー (Vasiliev Alexander)	ベルゲン大学・教授	
研究協力者	森本 徹 (Morimoto Tohru)	奈良女子大学・理学部・名誉教授 (14602)	
研究協力者	田村 光司 (Tamura Mitsushi)	工学院大学・非常勤講師	
研究協力者	クリスチャン オーテンリッド (Christian Autenried)	ベルゲン大学	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	モリナ モリチオ ゴドイ (Molina Mauricio Godoy)	フロンテラ大学・associate professor	
研究協力者	ラルーシ アデラー (Laaroussi Adellah)	ハノーバー大学・Docter	
研究協力者	馬場 蔵人 (Baba Kurando)	東京理科大学・理工学部・准教授 (32660)	
研究協力者	本間 泰史 (Homma Yasushi)	早稲田大学・理工学術院・教授 (32689)	
連携研究者	多羅間 大輔 (Tarama Daisuke) (30722780)	立命館大学・理工学部・准教授 (34315)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 幾何構造と微分方程式—対称性と特異点の視点から—	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 幾何構造と微分方程式—対称性・特異点及び量子化のの視点から—	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関

ノルウェー	University of Bergen			
ドイツ	Leibniz university of Hannover			
チリ	Universidad de La Frontera			
Denmark	Roskilde University			