

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05288

研究課題名（和文）スコロホッドの埋め込み及び関連する変分不等式の研究

研究課題名（英文）Study of Skorokhod embeddings and associated variational inequalities

研究代表者

針谷 祐 (Hariya, Yuu)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：20404030

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000 円

研究成果の概要（和文）：ガウス空間上に定まるオルンシュタイン＝ウーレンベック半群は超縮小性とよばれる性質をもち、それは場の量子論などの数理物理学にも応用されている。研究成果の一つとして、超縮小性を包含する関数不等式の族の成立を確率解析の手法により示した。また、確率解析の土台となるブラウン運動そのものに対しても、その指数汎関数から定まるある変換の下でのブラウン運動の像測度の不変性という、従来知られていなかった新たな性質を見出すなどの成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

オルンシュタイン＝ウーレンベック半群の超縮小性の発見は、1973年のE. ネルソンによる研究にまでさかのぼるもので、上述の研究成果によりその成立の背後にある一般的な枠組みが明らかになったことは意義あることと思われる。また、ブラウン運動の数学的な構成は1923年にN. ウィナーによりなされ、マルチンゲールやマルコフ過程、またガウス過程といった様々な確率過程のクラスにおける典型例を与えることから、以来確率論においてブラウン運動は基礎的かつ重要な位置を占めてきた。このように現代確率論の中で長い研究の歴史をもつブラウン運動に対して新たな性質が見出されたことは意義深いことと考えられる。

研究成果の概要（英文）：The Ornstein-Uhlenbeck semigroup defined in a Gaussian space is known to possess the hypercontractivity, which property has applications in mathematical physics such as quantum field theory. As one of the achievements of our study, we have applied stochastic analysis to obtain a family of functional inequalities that embraces the above-mentioned hypercontractivity. As for Brownian motion itself on which stochastic analysis is developed, we have revealed some invariance of the law of Brownian motion under a transformation involving its exponential functionals, which is new to our best knowledge, and which we think is of significance in probability theory because of its fundamental feature of Brownian motion.

研究分野：確率論

キーワード：確率解析 ブラウン運動

1. 研究開始当初の背景

スコロホッドの埋め込みとは、「実数軸上の与えられた確率分布に対して1次元ブラウン運動への停止時刻の代入によりその分布を実現せよ」との問題を指し、1960年代初めにA.V. Skorokhodにより提唱された。以来20を超える解が構成されており、それらのうちとくにR.F. Bassによる解([2])を用いて自身の論文[6]では、統計力学で有用なBrascamp-Liebの積率不等式に対して簡明な別証明を確率解析の手法によって与えるとともに、不等式の誤差評価も導いた。それに前後して、D.H. Rootによる解のある種の最良性とその変分方程式による特徴付けを与えた[5]を学んだことも契機に、Rootの解を含む種々の解の調査や、それらの関数不等式への応用というテーマを着想した。

2. 研究の目的

上述のBrascamp-Liebの不等式が述べられる設定において、Bassの解が有界となることが[6]における本質的な発見であり、このとき、その最良性によってRootの解も有界となることが分かる。このような、スコロホッドの埋め込み問題の解の性質や[5]により対応付けられた変分不等式の解の性質の解明を本研究では主たる目的とした。

3. 研究の方法

(1) Skorokhodの埋め込み問題に対するBassの解の構成にはClark-Oconeの公式とよばれる確率解析の結果が用いられる。このことと、やはり確率解析の基本的な公式である伊藤の公式(より正確にはその拡張である伊藤-田中の公式)を組み合わせることで[6]の主定理が得られる。本研究テーマの着想後間もなくの時期に取り組んでいた下記「4. 研究成果」(1)の項目の研究においても、これら確率解析の手法が有用であり、[6]の研究で得られた知見が生かされることとなった。

(2) 下記「4. 研究成果」における(2)や(4)の項目の研究の動機付けとなった事実の一つに、松本-Yorの結果([8])がある。その結果からの帰結の一つとして、ブラウン運動の指数汎関数を用いて定まる拡散過程の停止時刻、より正確には正の値への到達時刻、を考えてそれを指数ブラウン運動に代入すると、一般化逆ガウス分布が実現されるとの事実が従う。このことはSkorokhodの埋め込み問題の観点からも興味深い。というのもこの事実は、「ブラウン運動の汎関数として記述される拡散過程の到達時刻をもとのブラウン運動に代入することによって、ある特定の確率分布を実現する」との新たな解の構成法を示唆するからである。(2)の研究では、後述のBougerolの等式が松本-Yorの上記の結果と一般化逆ガウス分布のもつ一つの性質から再現される仕組みを見出し、まずはその方向性での知見の蓄積を企図したことが、続く(3)や(4)の研究成果につながる事となった。

4. 研究成果

(1) ガウス空間、すなわちガウス確率測度を底の測度にもつ確率空間の上に定義されるオルンシュタイン=ウーレンベック半群は、超縮小性をもつことが知られている。この超縮小性は空間の次元によらず定式化されるため、マリアバン解析や場の量子論のような無限次元解析において重要である。また、この性質は指数関数型の超縮小性とも同値であることが知られている。本項目の研究では、超縮小性におけるべき関数と指数型超縮小性における指数関数の特殊性に関心をもって考察を行い、これら二つの超縮小性を包括する関数不等式の族を確率解析の手法により導いた。その系としてガウス空間上の対数型ソボレフ不等式の拡張も得られる。対数型ソボレフ不等式は、一次の偏導関数が可積分性をもてば、もとの関数そのものの可積分性が改善されると主張し、やはり無限次元解析において重要な不等式である。なお、これらの結果はいわゆる-エントロピー不等式と密接なつながりをもつ。より正確には、超縮小性を包括する上述の不等式の族は、関数がある条件をみたす-エントロピー不等式の族と同値であり、この同値関係はオルンシュタイン=ウーレンベック半群を含むより一般のマルコフ半群の枠組みにおいても成立することを明らかにした。(下記「5. 主な発表論文等」の第1件目の論文)

(2) 幾何ブラウン運動の時間積分により与えられる、いわゆる指数ブラウン汎関数の確率分布の性質を調べる上で有用な道具の一つにBougerolの等式([4])がある。この等式は、独立なブラウン運動に指数ブラウン汎関数を代入して得られる確率変数はブラウン運動の双曲線正弦関数への代入に同分布であると主張する。本項目の研究ではBougerolの等式について考察を行った。その結果この等式の成立は、先述した松本-Yorの2000年の結果([8])を採用してある特殊なパラメータをもつ一般化逆ガウス分布の族の性質に帰着されることが分かり、あわせてBougerolの等式のいくつかの拡張を得た。指数ブラウン汎関数は幾何ブラウン運動の時間積分で与えられ、従来のBougerolの等式は時間積分の終端時刻がランダムでない場合、つまり決定論的な場合にその成立が知られていた。主だった拡張の一つに、その決定論的な時刻をブラウン運動の汎関数として定まるある拡散過程に関する停止時刻に置き換えても同様の等式の成立することが

挙げられ(上記「3. 研究の方法」の(2)の項目も参照), このことは既存の Bougerol の等式の証明からは非自明な拡張である. また同様の手法により, コーシー分布に従う 1 次元確率変数をもつ一種の不変性を導いた. (下記「5. 主な発表論文等」の第 2 件目の論文)

(3) 上述の指数ブラウン汎関数とブラウン運動自身との結合確率分布は, いわゆる Hartman-Watson 分布の(非正規化)密度関数を用いて記述されることが分かっている(M. Yor [10]). また, この Hartman-Watson 密度関数は, Yor の公式([9])として知られる積分表示をもつ. 指数ブラウン汎関数は, 数理ファイナンスにおけるアジアオプションの価格付けに現れるほか, ランダム環境下の拡散過程や双曲空間上のラプラス作用素の確率解析においても重要である. 本項目の研究では Hartman-Watson 密度関数の積分表示について考察を行った. その結果, Yor の公式とは異なる積分表現を見出し, その表現の応用とあわせて学術誌に発表した. (下記「5. 主な発表論文等」の第 3 件目の論文)

(4) 本項目の研究では, 上記(2)の研究成果に基づき Bougerol の等式について引き続き考察を行い, Bougerol の等式の確率過程の場合への拡張を得た. この結果は, ブラウン運動の像測度をもつある種の不変性を示すものであり, 正の実軸上の実数値連続関数からなる経路空間上に作用する変換の族を用いて記述される. これらの変換は, ギルサノフ変換, つまり適合型の経路変換の枠組みには含まれないものであるが, ギルサノフの公式に相当する絶対連続性の公式も得られる. この公式のマリアバン解析との結びつきも興味深いものである. Bougerol の等式についてはドリフト付きブラウン運動の場合への拡張が従来知られており, とくにドリフトの値が 1 のときは, 独立な対称ベルヌーイ確率変数を用いて述べられる. この場合の等式に対しても, 上記と同様に確率過程間の同分布性への拡張を得た. (下記「5. 主な発表論文等」の第 4 件目の論文)

なお, 最終年度の令和 3 年度の研究では本研究成果に基づいて考察を進めた結果, 時間逆転との可換性を有する新たな不変性を見出し, それを記述する経路変換の対合などの性質とあわせてプレプリントサーバ arXiv.org 上で研究成果の公開を学術誌上での発表に先立ち行った([7]).

(5) M. Boué, P. Dupuis によって見出された Brown 運動の有界汎関数に対する変分表現([3])について学生とともに学んだ内容に, 本項目の研究で得た変分表現の新たな応用を加えて論文にまとめ, 学術誌上で発表した. 変分表現を用いると, (1)の項目でも言及したオルンシュタイン = ウーレンバック半群の指数型超縮小性が簡明に導かれる. なお Boué-Dupuis の変分表現は近年, N. Barashkov と M. Gubinelli により場の量子論におけるいわゆる Φ_3^4 模型の解析に効果的に用いられた([1])ことから当該分野の研究者達の関心を惹いており, 本論文では従来の結果と比較して, 汎関数に対して必要最小限に近い仮定の下で変分表現の成立を導いているため, より多くの応用が見出されることが期待できる. (下記「5. 主な発表論文等」の第 5 件目の論文)

引用文献

- [1] N. Barashkov, M. Gubinelli, A variational method for Φ_3^4 , Duke Math. J. **169** (2020), 3339–3415.
- [2] R.F. Bass, Skorokhod imbedding via stochastic integrals, in Séminaire de Probabilités, XVII, 221–224, Lect. Notes in Math. 986, Springer, Berlin, 1983.
- [3] M. Boué, P. Dupuis, A variational representation for certain functionals of Brownian motion, Ann. Probab. **26** (1998), 1641–1659.
- [4] Ph. Bougerol, Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles, Ann. Inst. Henri Poincaré B (N.S.) **19** (1983) 369–391.
- [5] A.M.G. Cox, J. Wang, Root's barrier: construction, optimality and applications to variance options, Ann. Appl. Probab. **23** (2013), 859–894.
- [6] Y. Hariya, A connection of the Brascamp-Lieb inequality with Skorokhod embedding, Electron. Commun. Probab. **19** (2014), no. 61, 1–12.
- [7] Y. Hariya, Invariance of Brownian motion associated with exponential functionals, preprint, arXiv:2203.08706 (2022). 学術誌に投稿中.
- [8] H. Matsumoto, M. Yor, An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functionals, Part I: A time-inversion approach, Nagoya Math. J. **159** (2000) 125–166.

[9] M. Yor, Loi de l'indice du lacet Brownien, et distribution de Hartman-Watson, Z.Wahrsch. Verw. Gebiete **53** (1980), 71–95.

[10] M. Yor, On some exponential functionals of Brownian motion, Adv. Appl. Probab. **24** (1992), 509–531.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hariya Yuu	4. 巻 275
2. 論文標題 A unification of hypercontractivities of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup and its connection with ψ -entropy inequalities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 2647 ~ 2683
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2018.08.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hariya Yuu	4. 巻 130
2. 論文標題 On some identities in law involving exponential functionals of Brownian motion and Cauchy random variable	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 5999 ~ 6037
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2020.05.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hariya Yuu	4. 巻 35
2. 論文標題 Integral Representations for the Hartman-Watson Density	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 209 ~ 230
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-020-01067-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hariya Yuu	4. 巻 146
2. 論文標題 Extensions of Bougerol's identity in law and the associated anticipative path transformations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 311 ~ 334
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2022.01.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hariya Yuu, Watanabe Sou	4. 巻 27
2. 論文標題 The Bouře-Dupuis formula and the exponential hypercontractivity in the Gaussian space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Electronic Communications in Probability	6. 最初と最後の頁 1~13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/22-ECP461	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 針谷 祐
2. 発表標題 Integral representations for the Hartman--Watson density
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 針谷 祐
2. 発表標題 A hypercontractive family of the Ornstein--Uhlenbeck semigroup and its connection with α -entropy inequalities
3. 学会等名 偏微分方程式の臨界現象と正則性理論及び漸近解析 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 針谷 祐
2. 発表標題 Integral representations for the Hartman--Watson density
3. 学会等名 無限粒子系の確率解析学II (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 針谷 祐
2. 発表標題 A hypercontractive family of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup and its connection with ϕ -entropy inequalities
3. 学会等名 関西確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 針谷 祐
2. 発表標題 A hypercontractive family of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup and its connection with ϕ -entropy inequalities
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuu Hariya
2. 発表標題 A unification of the hypercontractivity and its exponential variant of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup
3. 学会等名 16th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 針谷 祐
2. 発表標題 Ornstein-Uhlenbeck 半群の超縮小性とその指数関数型とを結ぶ不等式
3. 学会等名 確率解析の諸相（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------