

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05289

研究課題名（和文）種々の関数空間上の作用素の調和解析

研究課題名（英文）Operators on some function spaces in harmonic analysis

研究代表者

佐藤 圓治（Sato, Enji）

山形大学・理学部・名誉教授

研究者番号：80107177

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：研究の目的は、ナビア-ストークス方程式に関係する重み付きモレー空間の研究、偏微分方程式に関するモジュレーション空間の研究及び関数空間の研究であった。モレー空間の研究においては、代表者と分担者の共同研究により、双線形分数冪積分作用素の有界性について成果を上げ論文として発表した。更に、実解析を専門とする分担者は、独自の研究により、有界性と重みとの関係を明らかにし論文として発表した。モジュレーション空間については、研究代表者が、共同研究により作用関数の観点から成果を上げ、論文として発表した。関数解析を専門とする分担者は、ヒルベルト空間上の作用素について研究し、成果を上げ、論文として発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

熱伝導はじめ物理現象などは、偏微分方程式を用いて記述されることが多い。偏微分方程式に関係する空間として、モレー空間、モジュレーション空間やヒルベルト空間が重要である。それらの空間やその空間上の作用素を詳しく研究することで、偏微分方程式のことがよく理解でき、ひいては、それらの現象が理解されることになる。

研究成果の概要（英文）：The subjects of our study are the study of the operators on the weighted Morrey spaces, the study of modulation spaces related to some partial differential equations, and the study of function spaces in functional analysis. Our results were pronounced in some mathematical journals with respect to the boundedness of fractional integral operators and the boundedness of the bilinear fractional integral operators on the weighted Morrey spaces, the operating functions on Fourier-Lebesgue spaces related to modulation spaces, and the study of the properties of normal operators on Hilbert spaces.

研究分野：実解析

キーワード：モレー空間 分数冪積分作用素 重み関数 モジュレーション空間 作用関数 ヒルベルト空間 正規作用素

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

- (1) A.Calderon と A.Zygmund は、1950 年代に L_p 空間上での特異積分作用素の有界性を研究し、Calderon-Zygmund 分解などの発見により、偏微分方程式の研究を飛躍的に発展させた。この関数の分解方法は、その後の解析学の発展に大きな貢献をした。特に、特異積分作用素の L_p 空間での研究は、偏微分方程式の研究にとって重要であり、Hardy 空間や Lorentz 空間や、その後に発見された様々な関数空間等の作用素の研究へとつながり、この方面の研究の基本となっている。
- (2) C.Morrey は、1930 年代に L_p 空間を一般にした関数空間を研究し、偏微分方程式に応用した。この関数空間が、今日の Morrey 空間といわれるものである。この関数空間は、関数空間としても興味があり、その後、1960 年代に J.Peetre など、1970 年代に D.R.Adams などにより多くの研究が行われた。その後、F.Chiarenza, M.Frasca などのイタリアの研究者達により、分数冪積分作用素や最大関数作用素など、解析学で重要な作用素の Morrey 空間上での有界性が盛んに研究されるようになった。
- (3) 1970 年代には、重み付き空間の理論が、Muckenhoupt や Wheeden 達により研究され、作用素の重み付き空間での有界性が論じられるようになった。 L_p 空間や Morrey 空間等に重みをつけた関数空間での特異積分作用素や分数冪積分作用素などのノルム評価や関数空間での最大関数の重み付き評価などは、新たな研究の発展につながり、多くの研究が生まれた。
- (4) A.Calderon が提出した Lipschitz 曲線上の双線形 Hilbert 変換の有界性に関する問題は、30 年ほど未解決であったが、1997 年に Lacey と Thiele が解決した。これを契機に双線形作用素を含む多重線形作用素の研究が盛んになった。
- (5) 分数冪積分作用素の研究は、1930 年代に、Hardy, Littlewood, Sobolev により行われ、その有界性が今日言われている Hardy-Littlewood-Sobolev の定理として証明された。その後 1950 年代に、Stein-Weiss により、重み付き L_p 空間に一般化された。2011 年に、De Napoli, Drelichman, Duran 達は、関数空間を原点からの距離にのみ依存する関数である radial 関数に限定した関数空間において論じた。
- (6) 1980 年代初めに H.G.Feichtinger が、Hilbert 空間である L_2 空間の拡張で、 L_p 空間の一般化ともいえる modulation 空間を導入した。それとともに、K.Grochnig や A.Benyi など多くの研究者により、この関数空間の基礎的な性質が研究された。これらの研究により、この関数空間は、これまで知られていた L_p 空間や Besov 空間や Sobolev 空間などと違った様相を呈することがわかってきた。また多くのこれまでの解析学で研究されてきた理論との関わりが深く研究されてきて、この空間の重要性が知られるようになってきた。一つの例としては、これまでの偏微分方程式は、 L_p 空間上での作用素の有界性との関係で、議論することが多かったが、 L_p 空間は、例えば、非線形シュレデンガー方程式を扱う場合は、あまり適切ではなかった。この modulation 空間は、その不都合な部分をクリアにしてくれることが Benyi, Grochnig 達の研究で明らかになった。このように、偏微分方程式への応用面でも、新たな現象を見せたこの modulation 空間は、多くの研究者により盛んに研究されるようになってきた。

2. 研究の目的

このような研究背景の下での研究目的は、次のとおりである。

- (1) 重み付き Morrey 空間上での線形作用素及び双線形作用素の研究であった。これについて L_p 空間での分数冪積分作用素に関する不等式である Hardy-Littlewood-Sobolev の定理や Stein-Weiss の定理が知られていたが、Stein-Weiss の結果を De Napoli, Drelichman, Duran 達が、radial 関数に限ると改良した結果を得ていた。研究の目的は、彼らの結果のさらなる研究であった。
- (2) 偏微分方程式との関係で有効である modulation 空間においては、非線形シュレデンガー方程式での初期値問題が Ruzhansky-Sugimoto-Wang(2012)により提出されていたが、これの調和解析的手法を用いた Bihimani-Ratnakmar(2016)による解決の研究結果があった。その調和解析的手法を発展させての modulation 空間の研究であった。

(3) 関数解析的方法による関数空間の研究であった。

3. 研究の方法

(1) Morrey 空間上の作用素の研究は、研究代表者と実解析を専門とする分担者との共同研究及びそれぞれの研究で行い、研究交流を行いながら、研究の発展を図った。また、研究会に参加し、研究情報の収集を行うことや Morrey 空間上の作用素の研究を行っている研究者との討論を積み重ねた。主に、これまで、分担者との研究成果があり、それを踏まえて共同研究を続けることによる研究方法であった。

(2) modulation 空間の研究では、連携研究者との共同研究を中心として、偏微分方程式の研究会や学会などへの参加及び研究者たちとの討論などで情報収集を行った。modulation 空間の研究は、これまで連携研究者との共同研究により成果があり、主に、これまでのように研究討論を続けることによる研究方法であった。更に、研究代表者には、長年の調和解析の研究において研究成果の蓄積があるので、それを偏微分方程式を専門とする連携研究者との共同研究により活用する研究方法であった。

(3) 関数空間の関数解析的方法研究は、関数解析の研究会や学会への参加など、関数解析を専門とする分担者による研究を中心に行われた。

(4) 文献調査においては、購入した図書を活用した。

4. 研究成果

(1) De Napoli-Drelichman-Duran 達が、radial 関数に限ったときに、分数冪積分作用素に関する Stein-Weiss の定理を改良した結果を得たが、それについて、Morrey 空間で研究し、Central Morrey 空間においていくつかの不等式を調べた。この Central Morrey 空間は、Morrey 空間を一般化した関数空間と考えられ、De Napoli-Drelichman-Duran 達の研究を詳しく調べることで、成果が得られた。更に、分数冪積分作用素の重み付き評価を Central Morrey 空間で得て、論文として発表した。

(2) radial 関数について双線形分数冪積分作用素の L_p 空間での重み付き評価を得、その応用も示して論文として発表した。Moen(2009)が、多重分数冪積分作用素について、重み付き評価を行った。共同研究により、radial 関数に対して冪乗の重みについて双線形分数冪積分作用素について、重み付き評価を行いより良い結果を得た。その結果は、De Napoli, Drelichman, Duran(2011)による線形型の結果の変形型になっている。応用として、bilinear Caffarelli-Kohn-Nirenberg の不等式の改良を得ている。

(3) 実解析を専門とする分担者は、2つのタイプの双線形分数冪積分作用素についての重み付き L_p 評価について、研究を行い、特に冪乗の重みについて十分条件や必要条件を明らかにし、論文として発表した。その内容は、2つのタイプの双線形分数冪積分作用素についての重み付き評価である。Moen(2009)は、そのうちの一つに対して必要十分条件を得ていたが、もう片方については、十分条件を知るのみであった。これについて、重みを冪乗型に制限すると必要十分条件が得られた。また、多重線形作用素についていくつかの研究成果をあげた。

(4) 非線形シュレデンガー方程式に関係した Ruzhansky-Sugimoto-Wang(2012)を Bhimani-Ratnakmar(2016)が、1970年代に研究されていた調和解析における作用関数の研究方法を用いて否定的に解決したが、扱う modulation 空間の作用関数の十分性を証明できなかった。これについて1次元の場合に Kobayashi-Sato(2018)が、彼らの論文を詳しく調べ、調和解析的手法を用いて示していた。その後、このアイデアを用いて多次元の場合に示した。

(5) modulation 空間は、局所的には Fourier-Lebesgue 空間になったり、もっと局所的には、絶対収束する Fourier 級数の空間になったりする性質がある。これを用いて、絶対収束する Fourier 級数を持つ連続関数の空間の作用関数を研究し、更に、Fourier-Lebesgue 空間の作用関数を調べて、その成果を論文として発表した。絶対収束する Fourier 級数を持つ関数空間は、1930年代に N.Wiener が研究していたもので、その後の Gelfand 達の代数的な研究により、可環 Banach 環の枠組みで取り扱いができるようになり、一般的な扱いの関数解析的研究に発展したもので、この方面での調和解析的研究の基本となる関数空間である。共同研究の内容は、単位円上の連続関数のフーリエ係数の絶対値の冪乗の和が、有限であるような関数空間を考えて、その関数空間に作用する関数の必要条件や十分条件について、ある程度の結果を得ることができた。これは、絶対収束するフーリエ級数を持つ連続関数空間の作用関数の一般化ともいえる方向での作用関数の研究である。更に、この研究内容を発展させて、Fourier-Lebesgue 空間の作用関数について十分条件や必要条件を調べて、研究成果を得て、論文として公表した。

(6)関数解析を専門とする分担者は、Hilbert 空間上の正規作用素の性質を丹念に調べ、その研究成果をいくつかの論文として発表した。研究成果の一つは、次のとおりである： p - $wA(s, t)$ という p -ハイポノーマルやクラス A を含む作用素族に関して、 $0 < s, t, s+t \leq 1, 0 < p \leq 1$ の場合に一般化されたスペクトル写像定理を示し、それと generalized Aluthge transform を用いて p -ハイポノーマル作用素に移すことで、ワイルの定理およびパトナム型不等式を示した。その他に、正規作用素に関する研究成果をいくつか論文として発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M.Kobayashi, E.Sato	4. 巻 28 - 42
2. 論文標題 Operating functions of A^q_s	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Fourier Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00041--22-09925-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y.Komori-Furuya, E.Sato	4. 巻 23
2. 論文標題 Weighted estimates of multilinear fractional integral operators for radial functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Inequalities and Applications	6. 最初と最後の頁 245 - 256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y.Komori-Furuya	4. 巻 71
2. 論文標題 Weighted estimates for bilinear fractional integral operators: a necessary and sufficient condition for power weights	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Collectanea Mathematica	6. 最初と最後の頁 25-37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M.H.Rashid, M.Cho, T.Prasad, K.Tanahashi, A.Uchiyama	4. 巻 84
2. 論文標題 Weyl's theorem and Punam's inequality for p -WA(s,t) operators	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Acta Sci.Math (Szeged)	6. 最初と最後の頁 573-589
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y.Komori-Furuya, E.Sato	4. 巻 290
2. 論文標題 Weighted estimates for fractional integral operators on central Morrey spaces.	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. Nachr.	6. 最初と最後の頁 2901 - 2908
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201700013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 佐藤圓治
2. 発表標題 Operating functions in harmonic analysis
3. 学会等名 2017年度JMMワークショップ「応用関数解析」(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	内山 敦 (Uchiyama Atsushi) (00353227)	東北医科薬科大学・教養教育センター・教授 (31305)	
研究分担者	古谷 康雄 (Furuya Yasuo) (70234903)	東海大学・理学部・特任教授 (32644)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	小林 政晴 (Kobayashi Masaharu) (30516480)	北海道大学・理学研究院・准教授 (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関