

令和 4 年 6 月 8 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05290

研究課題名（和文）拡散過程の古典力学系モデル

研究課題名（英文）A classical mechanical model of diffusion process

研究代表者

梁松 (Liang, Song)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：60324399

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：理想気体に置かれた重粒子が、環境軽粒子達とノン・ランダムな古典ニュートン力学に従い相互作用をしながら動く系について研究した。このとき、再作用の可能性により、重粒子の挙動はマルコフ性すら持たない。本研究では、粒子間相互作用はコンパクトな台を持つあるポテンシャル関数によって与えられる斥力であるモデルについて、軽粒子の初期エネルギーが下から有界であるという仮定の下で、軽粒子達の質量が0に収束するとき、重粒子の挙動を表す確率過程はある拡散過程に収束することを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

拡散過程という現象を説明するために、今までの研究では必要であった「すべての軽粒子の初期エネルギーが十分高い」という人工的な条件を緩和し、「軽粒子の初期エネルギーは下から有界である」という条件だけでこの問題を研究することができ、より現実モデルと一致するような説明を与えることができた。また、本研究で実用性が確認された、軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間が有界でなくても、それに対する精密な評価を与えることにより、軽粒子の挙動は散乱で近似できるというアイデアは、これからの研究でも適用できる手法である。

研究成果の概要（英文）：We considered a system of one massive particle interacting with an ideal gas, evolved according to non-random Newton mechanical principles. Due to the possibility of re-interactions, the stochastic process that presents the behavior of the massive particle is not a Markov process. In this research, we considered the case where the interaction is a repulsive force, given by a potential function with compact support, and assumed that the initial energies of the light particles are bounded from below. We proved that under this condition, when the mass of the light particles converges to 0, the stochastic process that presents the behavior of the massive particle converges to a diffusion process.

研究分野：確率論

キーワード：拡散過程 古典力学系 収束

## 1. 研究開始当初の背景

ニュートン力学系は、確率過程を説明するためによく使われるモデルである。例えば、ブラウン運動というよく知られている物理現象を説明するために、一定の初期分布に従う無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に置かれた重粒子の動きというモデルがよく使われる。なぜならば、直感的には、各時刻に重粒子はたくさんの軽粒子に作用され、もし各作用が独立であると仮定できるならば、独立同分布な確率変数の和に対する中心極限定理により、重粒子の挙動を拡散過程とみなせるからである。

しかし、現実的には、粒子間の相互作用は重粒子のみならず、それぞれの軽粒子へも影響を与えるので、各時刻における軽粒子の分布は相互作用前の軽粒子の分布と異なるのは自明であり、重粒子と一度相互作用した軽粒子が再び重粒子と相互作用することもあり得るので、各時刻に重粒子に作用する各軽粒子が独立同分布であると仮定するのは正しくない。

厳密的には、重粒子を入れる前の軽粒子環境は一定の確率分布に従い、軽粒子達と重粒子の間の相互作用はランダム性のない力学運動法則に従うとし、軽粒子達の質量  $m$  が  $0$  に収束し、軽粒子の密度及び各軽粒子の速度もそれに合わせて無限大に発散するときの重粒子の挙動を議論することが必要である。

この問題は、1971年に Holley によって初めて提出され、すべての粒子が一次元で動き、かつ粒子間相互作用は衝突で与えられる場合について研究された。その後、色々な研究者により拡張され、特に最近、粒子間相互作用はコンパクトな谷を持つポテンシャル関数により与えられるようなモデルについて研究が行われた。これまでは、すべての軽粒子の初期エネルギーはこのポテンシャル関数によって定められるある定数  $C$  以上であるという条件の下で、この問題が研究された。主なアイデアは、軽粒子は十分高い初期エネルギーを有すると、相互作用から受ける影響の強さが足りなく、軽粒子は相互作用の有効領域を短時間で通過する。よって、軽粒子の挙動を考えると、散乱（すなわち、重粒子が動かないものとして得られるもの）は十分よい近似である。

しかし、この「すべての軽粒子の初期エネルギーが十分高い」という仮定は人工的であり、現実とより合うモデルとして、定数  $C$  以下の初期エネルギーを有する軽粒子も存在するモデルを考える必要がある。

この場合、軽粒子の挙動よりも遥かに簡単である散乱を考えるだけでも分かるように、軽粒子の初期位置及び初期速度によっては、相互作用有効領域での滞在時間は非常に長い可能性があり、滞在時間に対する一様な評価は期待できない。例えば、軽粒子は（止まっている）重粒子に向かって真っすぐに行き、かつ初期エネルギーはちょうどポテンシャル関数の最大値と一致する場合、軽粒子は重粒子にたどり着いた瞬間すべてのエネルギーを使い果て、その後永遠に重粒子の場所に止まり、相互作用有効領域を離れることはできないので、この軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間は無限である。

このように、拡散過程という現象を説明するとき、より現実と合うモデルとして、十分高い初期エネルギーを有しない軽粒子も存在する場合を考えるのは必要であるが、既存な方法では解決できなかった重要な問題である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、上述のように、拡散過程の古典力学系モデルとして、無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に置かれた重粒子が、ランダム性のないニュートン力学運動法則に従って環境軽粒子と相互作用しながら動くという問題を考え、より現実と合う説明を実現するために、それほど高くない初期エネルギーを有する環境軽粒子も存在する場合についても、軽粒子達の質量が 0 に収束するとき、重粒子の挙動の極限として拡散過程を導くという問題について研究する。

ここで特に重要なのは、重粒子に作用する各軽粒子に関する独立性という現実的にはあり得ない条件を課さずに、重粒子の挙動を議論することである。

具体的には、環境軽粒子の初期分布はポアソン点過程に従うとし、粒子間相互作用はあるコンパクトな谷を持つポテンシャル関数によって与えられる斥力である系を考える。すなわち、系の初期値が与えられると、系は常微分方程式に従うものとする。このような系に対して、確率 1 でのすべての時刻における解の存在性及び一意性が証明できる。

本研究では、これまでの研究では調べることができなかった、粒子間相互作用を与えるポテンシャル関数によって定められる定数  $C$  以下の初期エネルギーを有する軽粒子も存在するモデルを考える、十分高い初期エネルギーを有する軽粒子しか存在しない場合と同様に、軽粒子達の質量が 0 に収束するとき、重粒子の挙動の極限として拡散過程を導出することを目標とする。

この場合、重粒子も軽粒子も同時に動くという我々のモデルよりも簡単な場合である散乱を考えるだけでも分かるように、軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間に対する一様な評価は期待できない。

## 3. 研究の方法

本研究において、主に以下のアイデア・手法が使われた：

まず、前項で説明した通り、十分高い初期エネルギーを有しない軽粒子が存在するとき、軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間は非常に長い可能性があるのが本研究の一番の難点である。

一方、前述の例からも分かるように、散乱粒子の相互作用有効領域における滞在時間が長くなる可能性があるのは、粒子間初期相対位置が初期速度とほぼ平行であるときのみである。さらに、散乱粒子の場合、粒子間相互作用は斥力であると仮定しているため、散乱粒子は「止ま

っている重粒子に向かって真っすぐに行き、かつ初期エネルギーはちょうどポテンシャル関数の最大値と一致する」という偶然な場合以外は、時間はかかるにしても、必ず有限な時間内に相互作用有効領域から離れる。

本研究では、この観察結果に着目し、散乱近似の相互作用有効領域における滞在時間に対し、「粒子間初期相対位置の初期速度に垂直な方向の成分」及び初期速度を用いて具体的な評価を与えた。

また、軽粒子の初期エネルギーが十分高い場合とは違い、軽粒子の初期エネルギーが十分に高くない場合、その相互作用有効領域における滞在時間を直接評価することはできない。本研究では、軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間を直接評価しようとせず、その近似である散乱粒子の滞在時間に対する評価及びこの散乱近似の誤差評価を用いて、間接的に軽粒子の滞在時間に対する評価を得ることができた。

特に、微分方程式の性質により、軽粒子の挙動とその近似である散乱との間の近似誤差は、相互作用有効領域における滞在時間に対して指数的に増大するので、滞在時間に対する対数的オーダーでの評価が必要であった。

上述のように、「粒子間初期相対位置の初期速度に垂直な方向の成分」が非常に小さい場合、上述の散乱近似が適用できない。これ以外に、より現実モデルと一致するような問題設定にするために、3次元モデルも含まれるよう低次元の場合を考えた。それにより、初期速度由来の特異集合も現れる。本研究では、これらの不都合な軽粒子に対し、それぞれが重粒子にもたらず相互作用を具体的に議論しようとせず、特異集合として纏め、全体の重粒子に対する影響は十分小さいであることを証明し処理した。

#### 4．研究成果

本研究の成果は、拡散過程の古典力学系による導出という課題において、粒子間相互作用はあるポテンシャル関数によって与えられる斥力であるという問題に対して、これまでの研究では仮定されていた「すべての軽粒子の初期エネルギーが十分高い」という人工的な条件を緩和し、「軽粒子の初期エネルギーは下から有界である」という条件だけでこの問題を研究することに成功し、より現実モデルと一致するような説明を与えることができた。

具体的には、一定の初期分布に従う無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に置かれた重粒子が、ランダム性のないニュートン力学運動法則に従って環境軽粒子と相互作用しながら動くというモデルを考え、十分高い初期エネルギーを有しない軽粒子も存在する場合について、軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間を詳しく調べることにより、すべての軽粒子の初期エネルギーが十分高い場合と同様に、軽粒子達の質量が0に収束するとき、重粒子の挙動はある拡散過程に収束することを証明することができた。

特に、この研究で着想し実用性が確認された、軽粒子の相互作用有効領域における滞在時間が有界でなくても、それに対する精密な評価を与えることにより、軽粒子の挙動は散乱で近似

することができるというアイデアは、これからの研究でも適用できる有効な手法である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Song Liang	4. 巻 170
2. 論文標題 A mechanical model of Brownian motion for one massive particle including slow light particles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 286--350
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10955-017-1934-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Song Liang	4. 巻 29
2. 論文標題 A mechanical model of Brownian motion for one massive particle including low energy light particles in dimension $d \geq 3$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Random operators and Stochastic equations	6. 最初と最後の頁 203-235
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/rose-2021-2062	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Song, Liang
2. 発表標題 A mechanical model of Brownian motion including low energy light particles
3. 学会等名 15th Workshop on Markov Processes and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Song Liang
2. 発表標題 A mechanical model of Brownian motion
3. 学会等名 Second Interdisciplinary and Research Alumni Symposium iJaDe2018（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Song Liang
2. 発表標題 Diffusion and classical dynamics
3. 学会等名 Mathematical Aspects of Quantum Fields and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 梁松
2. 発表標題 拡散過程の古典力学モデル--低エネルギー軽粒子が存在する場合について
3. 学会等名 確率論シンポジウム 2017
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------