様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １１ 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2023
課題番号：１７Ｋ０５２９１

研究課題名（和文）マルチンゲールの諸性質が維持される関数空間の特徴付け

研究課題名（英文）Characterizations of function spaces that preserve some results on martingales

研究代表者
菊池　万里（Kikuchi, Masato）

富山大学・学術研究部理学系・教授

研究者番号：２０２０４８３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：Lebesuge空間L^pなど、よく知られた関数空間において成立する様々なマルチンゲール不等式の拡張の研究を行なった。例えば、一様有界な可予測過程によるマルチンゲール変換に関する弱型不等式がL^pにおいて成り立つことがよく知られている。また、一般の確率過程の良可測射影・可予測射影に関するノルム不等式なども、L^p空間において成立することが知られている。これらの不等式が、L^pをBanach関数空間にXの弱空間w-Xに置き換えたときにも成立するための必要十分条件（そのような空間Xの特徴づけ）が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
マルチンゲール変換は、マルチンゲール理論を展開する上で欠くことのできない重要な概念であり、マルチンゲール変換に関する不等式に関する研究成果は、新たな研究の糸口となることが期待できる。
一般の（離散時）確率過程の良可測射影・可予測射影に関する不等式の研究成果は、数理ファイナンス分野への応用のために F. Delbaen, W. Schachermayerらによって得られた結果を大幅に拡張したものであり、新たな理論展開だけでなく、数理ファイナンスへの応用も期待できる。

研究成果の概要（英文）：I have studied some extensions of various martingale inequalities which hold in well-known function spaces such as Lebesgue spaces L^p.
It is well known that weak-type inequalities for martingale transforms by uniformly bounded predictable processes hold in L^p. It is also known that norm inequalities for the optional projection and the predictable projection of a general process hold in L^p. Necessary and sufficient conditions for these inequalities to remains valid when L^p is replaced by the weak spaces w-X of Banach function spaces X.

研究分野：マルチンゲール理論

キーワード：マルチンゲール　マルチンゲール変換　Banach関数空間　弱空間　良可測射影　可予測射影

１．研究開始当初の背景

1988 年から 1990 年代初めにかけて，マルチンゲール不等式の研究に大きな発展があった．W. B. Johnson と G. Schechtman は，再配列不変性をもった Banach 関数空間Xに於いて，Burkholder-Davis-Gundy 型の不等式 $C^{-1}\|Mf\|_X \le \|Sf\|_X \le C\|Mf\|_X$ が成り立つための必要十分条件を与えた．（以下，この不等式を BDG 不等式と呼ぶ．MfとSfの定義については[1]を参照されたい．）彼らの研究によれば，空間Xの下 Boyd 指標をα_Xで表すとき，この不等式が成り立つための必要十分条件は，$\alpha_X > 0$となることである．同じ結果が A. Antipa と I. Novikov によってそれぞれ独立に，相次いで発表された．これが（Lebesgue 空間や Orlicz 空間などの）よく利用される空間に於けるマルチンゲール不等式を極めて一般的な空間に於ける不等式に拡張した最初の結果である．

研究代表者（菊池）はより Banach 関数空間Xに再配列不変性を仮定しない設定で，同様の不等式を考察した．様々な考察の結果，BDG 不等式が成立すると仮定すれば，Xが再配列不変であることを示すことができた．これにより，上記の不等式が成立する Banach 関数空間Xの完全な特徴付けが得られた．この研究を契機に，研究代表者（菊池）は様々なマルチンゲール不等式が成り立つ Banach 関数空間の特徴付けの研究を実施してきた．

他方，Lebesgue 空間L^pに付随して弱 Lebesgue 空間w-L^pが定義され，様々に利用されているが，本研究を始める直前には，研究代表者（菊池）は Banach 関数空間Xに対してその弱空間w-Xを導入し，幾つかのマルチンゲール不等式がw-Xにおいて成立する Banach 関数空間の特徴付けを研究しつつあった．

このような背景の下，本研究ではw-Xの準ノルムに関するマルチンゲール不等式などを含む，様々なマルチンゲールの性質が維持される Banach 関数空間の特徴付けを主題として研究を実施した．

２．研究の目的

本研究の目的は，Lebesgue 空間や Orlicz 空間など，主要な関数空間において成立することが知られているマルチンゲールの諸性質が維持・拡張される Banach 関数空間の特徴付けを与えることにある．研究代表者（菊池）のこれまでの研究により，既に様々なマルチンゲール不等式やノルム収束定理が成立する Banach 関数空間の特徴付けが与えられている（[1]参照）．例えば，Banach 関数空間Xの弱空間w-Xにおいて，ある種のマルチンゲール不等式が成立するための必要十分条件は，新たに導入されたXの上・下基本関数を用いて表現される．本研究では，より多彩なマルチンゲールの諸性質が維持される Banach 関数空間の特徴付けを当初の目的とし，実際に，次の各事項について研究を進めた：

(1) 一様可積分なマルチンゲール$f = (f_n)_{n\ge0}$の一様有界な可予測過程$v = (v_n)_{n\ge0}$によるマルチンゲール変換$v * f = ((v * f)_n)_{n\ge0}$に対する不等式$\|(v * f)_\infty\|_{\text{w-}X} \le C\|f_\infty\|_{\text{w-}X}$ が成り立つ Banach 関数空間Xの特徴付け（Xが満たすべき必要十分条件）を導出する．
(2) フィルトレーション$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$に関する（可積分）確率過程$z = (z_n)_{n\ge0}$の良可測射影$\mathcal{O}z = ((\mathcal{O}z)_n)_{n\ge0}$，可予測射影$\mathcal{P}z = ((\mathcal{P}z)_n)_{n\ge0}$に対する不等式$\|\mathcal{O}z\|_{X(r)} \le C\|z\|_{X(r)}$，$\|\mathcal{P}z\|_{X(r)} \le C\|z\|_{X(r)}$が成り立つ Banach 関数空間$X$の特徴付けを導出する．

上記(1)における弱空間w-Xの定義，(2)における良可測射影・可予測射影の定義及び$\|\cdot\|_{X(r)}$の定義は「４．研究成果」の欄に記載する．

３．研究の方法

「２．研究の目的」欄の(1)の研究に関しては，求めるXの特徴付けがXの上基本関数・下基本関数と上基本関数によって定まる指標（ある定数）の値を用いて表現できることが予想された．上基本関数・下基本関数の定義については「４．研究成果」の欄に記載する．この予想が正しいことを示すためには，半開区間$(0,1]$上の積分可能な関数の全体から成る空間上で定義された平均化作用素，またはその（形式的）随伴作用素が，Xの上基本関数によって生成される$(0,1]$上の Marcinkiewicz 空間からそれ自身への有界線形作用素になること，及び，Xの上基本関数が下基本関数の定数倍以下になることを示せばよい．実際，この方法を用いて予想が正しいことを証明することができた．

「２．研究の目的」欄の(2)の研究に関しては，求めるXの特徴付けは，再配列不変性及びXの上 Boyd 指標・下 Boyd 指標を用いて表現できることが予想された．この予想が正しいことを示すために，不等式$\|\mathcal{O}x\|_{X(r)} \le C\|x\|_{X(r)}$，$\|\mathcal{P}x\|_{X(r)} \le C\|x\|_{X(r)}$のいずれかが，すべてのフィルトレーション$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$と$\|x\|_{X(r)} < \infty$であるすべての確率過程$x = (x_n)_{n\ge0}$に対して成立すれば，すべての条件付き平均作用素の$\mathrm{E}[\cdot|\mathcal{A}]$が$X$からそれ自身への一様有界な作用素になること，及び，平均化作用素またはその（形式的）随伴作用素がXの表現空間$\hat{X}$からそれ自身への有界作用素であることを示せばよい．実際，この方法を用いて予想が正しいことを証明することができた．ここに再配列不変 Banach 関数空間Xの表現空間$\hat{X}$とは，Xに属す任意のxに対

して$\|x^*\|_{\hat{X}} = \|\mathrm{x}\|_{\mathrm{X}}$となるような$(0,1]$上の再配列不変 Banach 関数空間のことである．但し，x^*はxの非増加再配列を表す．

４．研究成果

具体的な研究成果について述べるために、いくつかの定義や概念について以下に纏めておく．確率変数の Banach 空間Xが Banach 関数空間であるとは，次の 3 条件を満たすことである：

(B1) $L^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1$,
(B2) $|x| \le |y|$ a.s., $y \in X \implies x \in X$, $\|x\|_X \le \|y\|_X$,
(B3) $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$, $0 \le x_n \uparrow x$ a.s., $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty \implies x \in X$, $\|x\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X$.

但し(B1)の「$\hookrightarrow$」は連続的な埋め込みを表す．Banach 関数空間Xが再配列不変であるとは，

(RI) $y \in X$, $x \sim_d y \Rightarrow x \in X$, $\|x\|_X = \|y\|_X$

が成り立つことである．ここに$x \sim_d y$はxとyの分布が等しいことを表す記号とする．

Banach 関数空間Xに対して，その弱空間 w-Xを

$$\|x\|_{\text{w-}X} \coloneqq \sup\left\{\lambda\left\|1_{\{\omega:|x(\omega)|>\lambda\}}\right\|_X : \lambda > 0\right\} < \infty$$

であるような確率変数xの全体と定義する．w-Xは準 Banach 空間になる．$X = L^p$の場合には w-Xはw-$L^p = L^{p,\infty}$に他ならない．

（再配列不変とは限らない）Banach 関数空間Xの上基本関数φ_X，下基本関数ψ_Xはそれぞれ

$$\varphi_X(t) = \sup\{\|1_A\|_X : \mathrm{P}(A) = t\},\quad \psi_X(t) = \inf\{\|1_A\|_X : \mathrm{P}(A) = t\} \qquad (0 < t \le 1)$$

のように定義される．Xが再配列不変であるときはφ_Xとψ_Xは一致する．φ_Xは準凹関数であり，この関数に付随して半開区間$I = (0,1]$上の関数空間$M(X:I)$を

$$\|\eta\|_{M(X:I)} \coloneqq \sup\left\{\frac{\varphi_X(t)}{t}\int_0^t \eta(s)\,ds : 0 < t \le 1\right\} < \infty$$

であるようなI上の可積分関数の全体と定義する（すでに述べたようにη^*はηの非増加再配列を表す）．また，$x^* \in M(X:I)$であるような確率変数xの全体が作る空間を$M(X:\Omega)$で表す．$M(X:I)$, $M(X:\Omega)$はいずれも Marcinkiewicz 空間と呼ばれる．

Banach 関数空間Xに対して，区間$(0,\infty)$上の関数$m_X(s)$を

$$m_X(s) = \inf\left\{\frac{\varphi_X(st)}{\varphi_X(t)} : 0 < t, st \le 1\right\},\quad s \in (0,\infty)$$

のように定義し，Xの指標p_X, q_Xをそれぞれ

$$p_X = \lim_{s\to 0+} \frac{\log m_X(s)}{\log s},\qquad q_X = \lim_{s\to\infty} \frac{\log m_X(s)}{\log s}$$

と定義する．このとき$0 \le p_X \le q_X \le 1$となる．

Banach 関数空間Xが再配列不変であるとき，Xに属す任意のxに対して$\|x^*\|_{\hat{X}} = \|\mathrm{x}\|_{\mathrm{X}}$となる(0,1]上の再配列不変$\hat{X}$を$X$の表現空間と呼ぶ．実際そのような空間$\hat{X}$が存在する． $0 < s < \infty$とするとき，(0,1]上の関数ηに対して$E_s\eta(t) = \eta(st)$のように定義される線形作用素E_sは$\hat{X}$からそれ自身への有界作用素になる．ただし，$st \ge 1$となるときは$\eta(st) = 0$と解釈する．$(0,\infty)$上の関数$h(s)$を$h(s) = \|E_{1/s}\|$のように定め，Xの指標α_X，β_Xをそれぞれ

$$\alpha_X = \lim_{s\to 0+} \frac{\log h(s)}{\log s},\qquad \beta_X = \lim_{s\to\infty} \frac{\log h(s)}{\log s}$$

のように定義する．この場合も$0 \le \alpha_X \le \beta_X \le 1$となる．$\alpha_X$，$\beta_X$をそれぞれ$X$の下 Boyd 指標，上 Boyd 指標と呼ぶ．

以上の準備の下に，本研究の成果（得られた定理）の中から，本研究の様相を端的に表す 4 つの定理について述べる

確率空間$(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$のフィルトレーション（$\Sigma$の部分完全加法族の増大列）の全体を$\mathbb{F}$で表し，$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\ge 0} \in \mathbb{F}$に関する一様可積分なマルチンゲールの全体を$\mathcal{M}_u(\mathcal{F})$で表す．更に$\mathcal{M}_u = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathcal{M}_u(\mathcal{F})$と置く．また，$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$に関して可予測かつ$|v_n| \le 1$ $(n = 0,1,2,\dots)$であるような確率過程$v = (v_n)_{n\ge 0}$の全体を$\mathfrak{p}(\mathcal{F})$で表す（$v = (v_n)_{n\ge 0}$が可予測であるとは各$n \ge 1$に対して$v_n$が$\mathcal{F}_{n-1}$–可測であるということである）．

<u>定理 1</u> Banach 関数空間Xに対して，次の(1)–(6)は互いに同値である：

(1) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\ge 0} \in \mathbb{F}$，$f = (f_n)_{n\ge 0} \in \mathcal{M}_u(\mathcal{F})$，$v = (v_n)_{n\ge 0} \in \mathfrak{p}(\mathcal{F})$であれば

$$\|(v * f)_\infty\|_{\text{w-}X} \le C\|f_\infty\|_{\text{w-}X}.$$

(2) $f=(f_n)_{n\ge0}\in\mathcal{M}_u$，$g=(g_n)_{n\ge0}\in\mathcal{M}_u$ かつ $Sg\le Sf$ a. s. であれば

$$\|g_\infty\|_{\text{w-}X}\le C\|f_\infty\|_{\text{w-}X}.$$

(3) $f=(f_n)_{n\ge0}\in\mathcal{M}_u$，$g=(g_n)_{n\ge0}\in\mathcal{M}_u$ かつ $|g_\infty|\le|f_\infty|$ a. s. であれば

$$\|Sg\|_{\text{w-}X}\le C\|Sf\|_{\text{w-}X}.$$

(4) $f=(f_n)_{n\ge0}\in\mathcal{M}_u$であれば

$$C^{-1}\|f_\infty\|_{\text{w-}X}\le\|Sf\|_{\text{w-}X}\le C\|f_\infty\|_{\text{w-}X}.$$

(5) $\varphi_X(t)\le k\psi_X(t)$ $(0\le t\le1)$ であるような定数kが存在し，かつ $0<p_X\le q_X<1$.

(6) $\varphi_X(t)\le k\psi_X(t)$ $(0\le t\le1)$ であるような定数kが存在し，かつ

$$1<\liminf_{t\to0+}\frac{\varphi_X(At)}{\varphi_X(t)}\text{ かつ }\limsup_{t\to0+}\frac{\varphi_X(At)}{\varphi_X(t)}<A$$

更にXが上記の(1)-(6)のいずれか 1 つ（従って(1)–(6)すべて）を満たすとき，w-$X=M(X:\Omega)$となる.

Xを Banach 関数空間とし，$1\le r<\infty$とする．このとき，確率過程$z=(z_n)_{n\ge0}$に対して$\mathrm{S(r:z)^r}=\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|^r$となるように$S(r:z)$定義し，$\|z\|_{X(r)}=\|S(r:z)\|_X$と置く．$X(r)$を$\|z\|_{X(r)}<\infty$であるような確率過程の全体が作る Banach 空間とする．また，$r=\infty$のとき，$X(\infty)$を$\|z\|_{X(\infty)}\coloneqq\|\sup_{n\ge0}|z_n|\|_X<\infty$であるような確率過程の全体が作る Banach 空間とする.

フィルトレーション$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$が与えられたとき，確率過程$z=(z_n)_{n\ge0}$の良可測射影$\mathcal{O}z=((\mathcal{O}z)_n)_{n\ge0}$を$(\mathcal{O}z)_n=E[z_n|\mathcal{F}_n]$ $(n\ge0)$で定義する．また，$z=(z_n)_{n\ge0}$の可予測射影$\mathcal{P}z=((\mathcal{P}z)_n)_{n\ge0}$を$(\mathcal{P}z)_n=E[z_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ $(n\ge0)$で定義する．但し，$\mathcal{F}_{-1}=\mathcal{F}_0$と約束する.

定理 2 Banach 関数空間Xに対して，次の(1)，(2)は互いに同値である.

(1) すべての$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}\in\mathbb{F}$と$\mathcal{F}$に適合する任意の確率過程$z=(z_n)_{n\ge0}$に対して

$$\|\mathcal{O}z\|_{X(\infty)}\le C\|z\|_{X(\infty)}.$$

(2) Xはノルムを付け替えることにより再配列不変になり，$\beta_X<1$

定理 3 Banach 関数空間Xに対して，次の(1)，(2)は互いに同値である.

(1) すべての$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}\in\mathbb{F}$，すべての$r\in(1,\infty)$と$\mathcal{F}$に適合する任意の確率過程$z=(z_n)_{n\ge0}$に対して

$$\|\mathcal{O}z\|_{X(r)}\le C\|z\|_{X(r)}.$$

(2) Xはノルムを付け替えることにより再配列不変になり，$0<\alpha_X\le\beta_X<1$.

定理 4 Banach 関数空間Xに対して，次の(1)–(3)は互いに同値である.

(1) すべての$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}\in\mathbb{F}$，すべての$r\in(1,\infty]$と$\mathcal{F}$に適合する任意の確率過程$z=(z_n)_{n\ge0}$に対して

$$\|\mathcal{P}z\|_{X(r)}\le C\|z\|_{X(r)}.$$

(2) すべての$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}\in\mathbb{F}$と$\mathcal{F}$に適合する任意の確率過程$z=(z_n)_{n\ge0}$に対して

$$\|\mathcal{P}z\|_{X(1)}\le C\|z\|_{X(1)}.$$

(3) Xはノルムを付け替えることにより再配列不変になり，$\alpha_X>0$.

上記の 3 つの定理において，$z=(z_n)_{n\ge0}$が$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$に適合するとは，各$z_n$が$\mathcal{F}_n$-可測であるということである.

上記以外の本研究の成果に関しては[2]，[3]を参照されたい.

参考文献

[1] 菊池万里，マルチンゲールと関数空間」数学，日本数学会，2014 年 66 巻 3 号 p. 249-274
[2] Masato Kikuchi, On martingale transform inequalities in certain quasi-Banach function spaces, Boll. Unione Mat. Ital. 12 (2019), no. 3, 485–514.
[3] Masato Kikuchi, On some inequalities for the optional projection and the predictable projection of a discrete parameter process, Ann. Math. Blaise Pascal 29 (2022), no. 1, 149–185.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Masato Kikuchi	4．巻 29
2．論文標題 On some inequalities for the optional projection and the predictable projection of a discrete parameter process	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Annales Mathematiques Blaise Pascal	6．最初と最後の頁 149-185
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/ambp.409	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Masato Kikuchi	4．巻 12
2．論文標題 On martingale transform inequalities in certain quasi-Banach function spaces	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Bollettino dell'Unione Matematica Italiana	6．最初と最後の頁 485-514
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40574-018-0184-y	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 菊池万里
2．発表標題 弱型 Burkholder 不等式の成り立つ関数空間
3．学会等名 RIMS 共同研究（公開型）関数空間論とその周辺
4．発表年 2019年

1．発表者名 菊池万里
2．発表標題 弱空間における Burkholder-Davis-Gundy 型不等式
3．学会等名 富山解析セミナー2018
4．発表年 2018年

１．発表者名 菊池万里
２．発表標題 離散時間確率過程の可予測射影に関する不等式について
３．学会等名 富山解析セミナー2017
４．発表年 2017年

１．発表者名 菊池万里
２．発表標題 可予測射影及び良可測射影に関する不等式について
３．学会等名 RIMS共同研究（公開型）「関数空間の深化とその周辺」
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関