

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05296

研究課題名(和文) 多項式および超越整関数の複素力学系の多様性の研究

研究課題名(英文) Diversity of the dynamics of polynomials and transcendental entire functions

研究代表者

木坂 正史 (KISAKA, Masashi)

京都大学・人間・環境学研究科・教授

研究者番号：70244671

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：多項式と超越整関数の力学系を主に複素解析的手法を用いて研究した。特に著しい結果として、Mandelbrot集合において数値計算上見られる以下の現象について、数学的に定式化し、実際にそのような構造が存在することを証明した：Mandelbrot集合内の小さいMandelbrot集合を1つとり、その中で放物型周期点を持つもの、または臨界点0の軌道が前周期的になるものに対応するパラメータを選び、その近傍を拡大していくと、対応するJulia集合を摂動して得られるCantor型のJulia集合に似た構造とそれによる入れ子構造が見られ、最終的には「更に小さいMandelbrot集合」が出現する。

研究成果の学術的意義や社会的意義

概要で述べた成果は「相空間上の対象物であるJulia集合がパラメータ空間であるMandelbrot集合内のあちこちに現れる」という驚くべき現象を数学的に解明するもので、そのインパクトと意義は大きい。また「Mandelbrot集合の境界のHausdorff次元は2である」という穴倉による有名な結果に対して「Mandelbrot集合の境界にはCantor型のJulia集合の擬等角写像による像で、Hausdorff次元が2にいくらかでも近いものがあるから」という、非常にわかりやすい説明ができるようになったのは意義深い。これは社会に向かって力学系理論の面白さをアピールするための非常に強力な武器となる。

研究成果の概要(英文)：We investigated the dynamics of polynomials and transcendental entire functions by mainly using complex analytic methods. As a remarkable result, we proved that the following phenomena which can be observed in the Mandelbrot set by computer graphics actually exist by formulating them mathematically and proving the statements: Take a small Mandelbrot set in the Mandelbrot set, and choose a parameter from it which corresponds to a quadratic polynomial with either a parabolic periodic point or whose critical point 0 is preperiodic. By zooming in its neighborhood, we can see a quasiconformal image of a Cantor Julia set which is a perturbation of a parabolic or Misiurewicz Julia set. Furthermore, by zooming in its middle part, we can see a certain nested structure ("decoration") and finally another "smaller Mandelbrot set" appears.

研究分野：力学系

キーワード：超越整関数 Mandelbrot集合 Julia集合 Fatou集合 擬等角写像 中立サイクル 多項式類似写像  
構造有限超越整関数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

超越整関数  $f(z)$  の力学系は多項式に比べるとあまり研究されていない。その理由の第1には  $\infty$  が真性特異点である故に  $\infty$  の近傍における  $f$  の力学系的挙動は極めて複雑になることがある。また第2に相空間である  $\mathbb{C}$  がコンパクトでない故に、コンパクト距離空間での既存の幾何学、エルゴード理論などが適用できないことが挙げられる。この困難に立ち向かい、超越整関数の力学系を理解すべく、私は研究を始めた。今まで私が行ってきた研究では「多項式の力学系には起こらないが超越整関数の力学系では起こる現象＝超越整関数特有の現象」を主に扱ってきたが、

＊個々の超越整関数が示す特有の現象でまだ明らかになっていないものが多数ある

＊超越整関数の族のパラメータ空間の構造についてはほとんど何も明らかにしていない

の2点においてまだまだ不十分であると感じていた。この両者は共に「多様性」という言葉で説明できる。即ち両者は共に「超越整関数の力学系が示し得る多様性」で、1つ目は「超越整関数全体の中での多様性」であり、2つ目は「超越整関数の（自然な）パラメータ族の中での多様性」である。このような意味における「多様性」の研究が私の今後の研究の方向性として自然であり、また複素力学系研究の発展のためには極めて重要になってくると考えるに至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は多項式と超越整関数の力学系の2つの意味での「多様性」を明らかにすることであった：

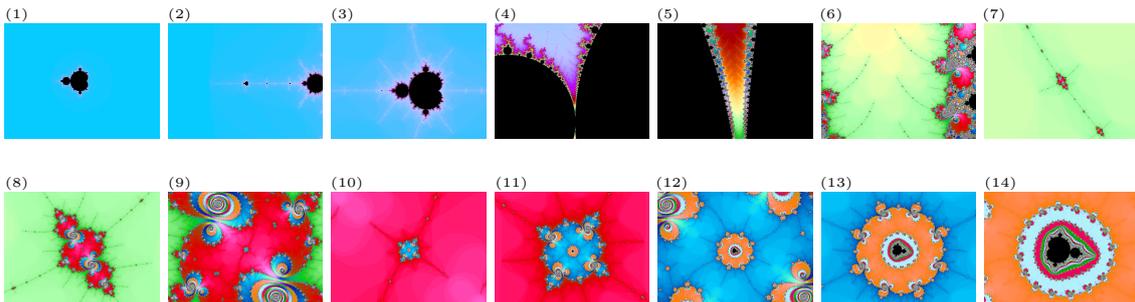
(1) 超越整関数の力学系が示し得る多様性、特に多項式では起こり得ない現象の研究。具体的には Julia 集合の位相的性質や計量的性質で多項式の場合には見られないものの可能性の追求とその解明。

(2) 整関数の力学系の族の多様性を表現しているパラメータ空間の構造の研究。具体的には Mandelbrot 集合内にコンピュータグラフィックスによって見られる複雑な構造（注：詳細は後述）の数学的定式化と証明。更に引き続いて高次の多項式族に対する同様な定式化と証明。そして究極的には、ある多項式族の極限とも見なせる「指数関数族」などの超越整関数族のパラメータ空間の構造の解明。

特に (2) について： 2次多項式族  $P_c(z) := z^2 + c$  に対して

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid J(P_c) \text{ は連結} \}$$

を Mandelbrot 集合という。  $\partial M$  はこの族が分岐を起こすパラメータ全体であり、コンピュータグラフィックスでも見られるとおり、その構造の複雑さは筆舌に尽くしがたい。ここでは私がコンピュータグラフィックスによって発見した以下のような  $M$  内の構造について数学的に考察する： $M$  の適当な部分を拡大すると下図のように、ある Julia 集合 (=  $J_0$ ) に非常に似ている部分が現れる（下図 (8)）。その中央部分を更に拡大すると  $J_0$  を  $z^2$  で引き戻したような構造 ( $J_1$ , 下図 (11)) が現れる。更に拡大を続けると一般に  $J_0$  を  $z^2$  で  $n$  回引き戻したような構造  $J_n$  (下図 (13), (14) にはそれぞれ  $J_2, J_3$  が見える) が現れる。このような入れ子構造の果てに小さな Mandelbrot 集合  $M_\infty$  (下図 (14)) が現れる。またこの  $M_\infty$  の適当な部分を拡大していくと、新たなより複雑な入れ子構造（詳細は省略）が現れ、その果てには再び更に小さい Mandelbrot 集合が現れる。以上の現象をモデルにより定式化し、それが実際に実現されていることを証明する。



### 3. 研究の方法

(1) 様々な先行研究を理解すると同時に、既存の複素解析の手法や複素力学系の手法を組み合わせることによって問題解決の方法を試行錯誤しながら模索する。

(2) 取り組む問題によって適宜コンピュータグラフィックスをもちいて現象の把握、予想される数学的事実の発見、また逆に、示した一般論の具体例による検証などを行う。

(3) 日本数学会の総合分科会や数理解析研究所での力学系、複素力学系、また函数論関係の研究集会などに積極的に参加し、新たな知見を得ると同時に、本研究によって得られた成果を発表する。さらには海外での研究集会にも参加して、日本より多くいる海外の複素力学系研究者とのディスカッションを通じて問題解決のヒントを得たり、研究の新たな方向性などを探る。

### 4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りである。

\*多項式の力学系について

(1) ① Mandelbrot 集合において、一般の放物型周期点を持つ 2 次多項式に対応するパラメータの近傍を拡大していくと、対応する Julia 集合を摂動して得られる Cantor 型の Julia 集合に似た構造とそれによる入れ子構造（「decoration」と呼ぶ）が見られ、最終的には「小さい Mandelbrot 集合」が出現する。この現象は、入れ構造に対するモデル集合を定義し、ある擬等角写像によるその集合の像として現れる、という定式化で説明できる。

② 同様の入れ子構造が Misiurewicz 点（= 2 次多項式の臨界点 0 が preperiodic、即ち、1 回以上写像で動かすと周期点に落ち着くようなパラメータ値）の近傍の拡大についても現れる。

③ ①にある「小さい Mandelbrot 集合」に属するパラメータに対する Julia 集合には①に現れたのと同様の入れ子構造が存在する。

④ ②の Misiurewicz 点をうまく選ぶと、現れる入れ子構造は歪曲度が 1 にいくらかでも近いような擬等角写像による像になっている。

⑤ ①や②で得られる「decoration」に属するパラメータに対する力学系は semihyperbolic という性質を持つ。またこれから semihyperbolic だが Misiurewicz や hyperbolic でないパラメータが Mandelbrot 集合の境界に稠密に存在することがわかる。

⑥ ④と⑤の結果を組み合わせることによって、「Mandelbrot 集合の境界の Hausdorff 次元は 2 である」という宍倉による有名な結果に対して「Mandelbrot 集合の境界には Cantor 型の Julia 集合の擬等角写像による像で、Hausdorff 次元が 2 にいくらかでも近いようなものが見えるから」という、非常にわかりやすい説明をつけることができるようになった。

\*超越整関数の力学系について

(2) 超越整関数  $f$  の Julia 集合が Sierpinski カーペット（即ち、全疎である連結かつ局所連結なコンパクト集合で、その補集合の各成分の境界が互いに交わらない Jordan 閉曲線になるもの）となるための 1 つの十分条件（即ち、(1)  $f$  の Fatou 集合の各連結成分は有界であり、その境界は  $f$  の特異点の軌道を含まない、(2)  $f$  の Fatou 集合には遊走領域は存在しない、(3)  $f$  の Fatou 集合の各連結成分のうち周期的なものは、有限個の吸引領域だけから成り、しかもそれらの境界は互いに交わらない、(4) Fatou 集合内の特異点の軌道は全て (3) の有限個の吸引領域に含まれる）を得た。またこの条件を満たす具体例が存在することを次のようにして示した：双曲型である多項式  $P$  で、その Fatou 集合の有界な連結成分がいくつかの吸引領域とその逆像だけから成り、それらが互いに交わらない、という条件を満たすものを与えると、それに対して、超越整関数  $f$  で  $P$  の力学系を部分力学系として含み（即ち、適当な円板への  $f$  の制限がある擬等角写像によって  $P$  と共役となる）、しか

も  $f$  の Julia 集合が Sierpinski カーベットとなるようなものが存在することを示した. 更にこのような超越整関数  $f$  を関数の増大度の観点からは, ある意味で多項式にいくらでも近いようなものとして構成することもできることを示した.

(3) 有理関数の Fatou 集合上での力学系については「Fatou-穴倉不等式」と呼ばれる, 持ち得る Fatou 成分のサイクルの個数に関する不等式が知られており, この結果の類似が有限型超越整関数(「クラス  $S$ 」と呼ばれている)に対して成り立つことが Eremenko と Lyubich によって知られていた. これは「 $d$  個の特異値を持つ有限型超越整関数の吸引サイクル, 有理的中立サイクル, Siegel 円板のサイクル, Cremer サイクルの個数の和は  $d$  以下である」ことを主張する. 有理関数に対する不等式については, その不等式を満たすような整数の組を与えるとそれを実現するような有理関数が存在する, という意味での最良性が成り立つが, 有限型超越整関数の場合には未知であった. これに関して同様の最良性が成り立つことを次のように示した: 有限型超越整関数の中で具体的な式表現を持つ構造有限型超越整関数に注目し, まず  $d$  個の特異値を持つ構造有限型超越整関数で  $d$  個の Siegel 不動点を持つものを具体的に構成する. これに対し擬等角手術を施すことにより, Siegel 不動点を 1 個減らして例えば吸引不動点を 1 個増やす, 或いは有理的中立不動点を 1 個増やす等が可能であることを示す. これを繰り返し行うことで目的を達成する. 証明は有理関数の場合の類似ではあるが, Cremer サイクルを持つ超越整関数を構成する際には有理関数のときに使えた「Cremer の定理」が使えないことが判明した. これを回避する方法を 2 種類作り, 最終的な解決に至った.

(4) 構造有限超越整関数の中のサブクラスである「 $f(z) = P(z)e^{Q(z)}$  ( $P(z), Q(z)$  は多項式,  $Q(z)$  は定数でない)」という型の超越整関数で, 特に中立サイクルを持つようなものについてその様々な可能性について調べた. 主な結果は以下の通りである:

- 任意の自然数  $q$  に対して, 原点以外に  $q$  個の Siegel 不動点を持ち, 対応する各 Siegel 円板の境界が擬円となり, しかも臨界点を少なくとも 1 個ずつ含むようなものを構成した. 更に各 Siegel 円板の境界上の臨界点の個数がちょうど 1 個となるようなものも構成した. [先行研究では  $f(z)$  の除外値である原点が Siegel 不動点である場合のみこのような例が示されていた].

- 原点で中立不動点を持ち, この不動点が Siegel 不動点か Cremer 不動点か(即ち, 線型化可能か不可能か)が不動点での乗数が Bryuno 条件を満たすかどうかで判定できるような関数  $f(z)$  を構成した [先行研究で知られていたのは  $\lambda ze^z$  のみ. 構成した関数は  $P(z)$  の次数を与えるごとに無限個存在する].

- (i) Siegel 不動点を持ち, Julia 集合の Lebesgue 測度が正となるもの, (ii) Cremer 不動点を持ち, Julia 集合の Lebesgue 測度が正となるもの, をそれぞれ構成した.

- 任意の自然数  $q$  に対して, Cremer 点を  $q$  個持ち, 各 Cremer 点での乗数が  $[\text{Cremer}(d)]$  と呼ばれる条件を満たすようなものを構成した ( $d$  は構成する際に定まるある自然数). なおこの条件は  $d$  次多項式の中立サイクルが Cremer 点であることを保証するものであるが, 超越整関数に対しては一般に適用できない.

- 乗数が  $E$  というあるクラス (Diophantus 数を含み, Bryuno 数全体に含まれるもの) に含まれるような中立不動点を持つ超越整関数の 1-parameter 族で, Julia 集合の Lebesgue 測度が 0 となる parameter が開集合を含むようなものを構成した.

結果の証明の主なアイデアは「上記のサブクラスに属する関数で適当な有界単連結領域に制限すると多項式類似写像の構造を持つようなものを構成する」というものである.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kisaka Masashi, Naba Hiroto	4. 巻 45
2. 論文標題 Some transcendental entire functions with irrationally indifferent fixed points	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 369-387
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj45304	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kisaka Masashi, Naba Hiroto	4. 巻 26
2. 論文標題 Best possibility of the Fatou-Shishikura inequality for transcendental entire functions in the Speiser class	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 165 ~ 181
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/ecgd/373	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masashi KISAKA	4. 巻 30
2. 論文標題 On topological properties of Fatou sets and Julia sets of transcendental entire functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 235-273
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/suga/425	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 7件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Masashi KISAKA
2. 発表標題 Polynomial-like maps and transcendental entire functions with irrationally indifferent fixed points
3. 学会等名 RIMS Workshop "Complex Dynamics and Related Topics"（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masashi KISAKA
2. 発表標題 Transcendental entire functions with irrationally indifferent fixed points
3. 学会等名 「等角写像論・値分布論」合同研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 木坂正史
2. 発表標題 Polynomial-like mappings and transcendental entire functions with irrationally indifferent fixed points
3. 学会等名 2023 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masashi Kisaka
2. 発表標題 Fatou-Shishikura inequality for transcendental entire functions in the Speiser class
3. 学会等名 On geometric complexity of Julia sets - III (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masashi Kisaka
2. 発表標題 Best possibility of the Fatou-Shishikura inequality for transcendental entire functions in the Speiser class
3. 学会等名 RIMS Workshop "Aspects of Complex Dynamics" (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masashi Kisaka
2. 発表標題 Julia sets of commuting entire functions
3. 学会等名 RIMS Online Workshop "Complex Dynamics and Related Topics" (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masashi Kisaka
2. 発表標題 Commuting entire functions with a common fixed point
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masashi Kisaka
2. 発表標題 Fatou-Shishikura inequality for transcendental entire functions in class S
3. 学会等名 Bifurcation and stability in complex dynamics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masashi Kisaka
2. 発表標題 Fatou-Shishikura inequality for transcendental entire functions in class S
3. 学会等名 2019年度 冬の力学系研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masashi Kisaka
2. 発表標題 Fatou-Shishikura inequality for transcendental entire functions in class S
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masashi KISAKA
2. 発表標題 Transcendental entire function of arbitrarily slow growth with prescribed polynomial dynamics
3. 学会等名 New Developments in Complex Analysis and Function Theory (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masashi KISAKA
2. 発表標題 Construction of transcendental entire functions of arbitrarily slow growth with prescribed polynomial dynamics
3. 学会等名 Resonances in Complex Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masashi KISAKA
2. 発表標題 Julia sets in the Mandelbrot set consist of semihyperbolic parameters
3. 学会等名 2018年度「等角写像論・値分布論」合同研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masashi KISAKA
2. 発表標題 Julia sets appear quasiconformally in the Mandelbrot set
3. 学会等名 Computational Methods and Function Theory 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	川平 友規 (Kawahira Tomoki) (50377975)	一橋大学・大学院経済学研究科・教授  (12613)	
研究協力者	那波 弥人 (Naba Hiroto)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------