

令和 3 年 6 月 17 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05297

研究課題名(和文) 後退確率微分方程式と非線形確率積分

研究課題名(英文) Backward stochastic differential equation and nonlinear stochastic integration

研究代表者

深澤 正彰 (Fukasawa, Masaaki)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：70506451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：数理ファイナンスへの応用を念頭に後退確率微分方程式と非線形確率積分の研究を行った。本研究は非線形確率積分によって市場流動性を考慮した資産運用収益をモデル化するという動機と、後退確率微分方程式を経由して非線形確率積分を伊藤積分で表現できるという着想から始まった。非線形条件付き期待値を効用関数とするベルトラン型競争市場におけるヘッジ問題を研究し、最も単純な設定においてはヘッジ戦略がバーガース方程式の解によって記述され、ヘッジ対象ペイオフの形状がバーガース方程式が表現する衝撃波として伝播し、資産価格の暴落を引き起こすメカニズムを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

後退確率微分方程式と非線形確率積分の関係が明らかとなり、伊藤の表現定理の非線形確率積分への拡張や、後退確率微分方程式の解の非退化性など確率解析分野における新しい知見が得られた。これら数学的成果の帰結として、ファイナンスモデルの解析により市場の非線形性に関する斬新な解釈とリスクヘッジ手法が得られ、流動性リスクの考慮を通じた金融工学技術の発展を通して、金融市場の安定化に貢献する。

研究成果の概要(英文)：We studied backward stochastic differential equation and nonlinear stochastic integration with applications to mathematical finance. This project was motivated by an idea to model Profit and Loss under a nonlinear market, where the nonlinearity is due to permanent market impacts, by a nonlinear stochastic integral, and that the nonlinear stochastic integral can be linearized in a sense by using a solution of a backward stochastic differential equation. By assuming a Bertrand-type competition with utility function modeled by a nonlinear conditional expectation, we derive a perfect hedging strategy under this market. Under the simplest setting the hedging strategy is a solution of Burgers' equation, and we find a mechanism that an endowment shock is propagated along Burgers' equation to invoke a crash in the underlying asset price.

研究分野：数理ファイナンス

キーワード：後退確率微分方程式 非線形確率積分

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

金融工学は線形な市場を仮定しており、とくにヘッジ戦略はその戦略自体が需給に与える影響を無視しているため、大規模なヘッジは想定外の損失を生むことがある。これは市場流動性リスクの一つであるが、これを理論的に、かつ実装可能なモデルで解析する枠組みが不十分であった。非線形確率積分を用いてモデル化する先行研究はあったものの計算手法に乏しく、現象の解析という面でも、実務的なヘッジ手法としても有効とは言えなかった。

### 2. 研究の目的

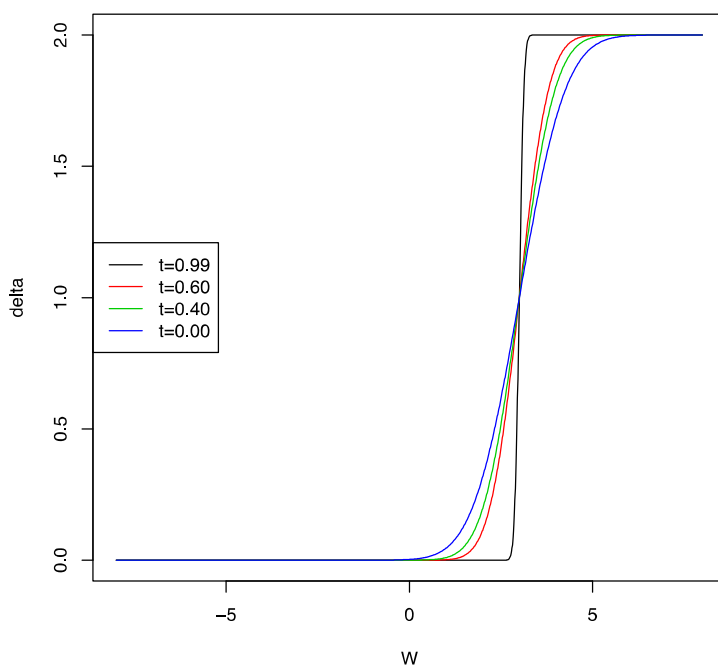
数理ファイナンスへの応用を念頭に後退確率微分方程式と非線形確率積分の研究を行う。

### 3. 研究の方法

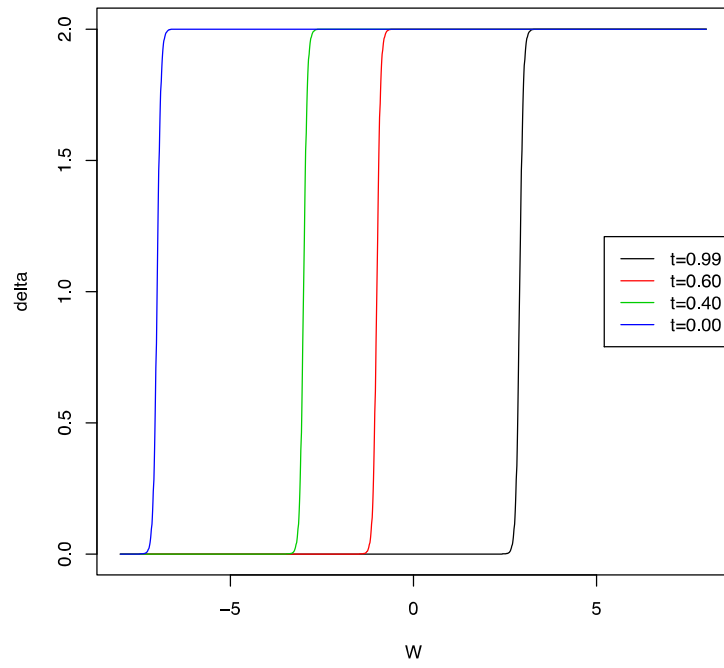
関連分野の研究者との議論・情報交換を助力に、新たな理論を構築する。

### 4. 研究成果

非線形条件付き期待値を効用関数とするベルトラン型競争市場におけるヘッジ問題を研究し、最も単純な設定においてはヘッジ戦略がバーガース方程式の解によって記述され、ヘッジ対象ペイオフの形状が、バーガース方程式が表現する衝撃波として伝播し、資産価格の暴落を引き起こすメカニズムを明らかにした。この他関連した後退確率微分方程式の研究として、退化型前進後退確率微分方程式の解を陽に構成して流動性コストの下での均衡価格過程を導出した。また確率積分及び確率微分方程式の離散化誤差についても成果を得た。後退確率微分方程式の高次元ダイヤモンド格子上への離散化にも成功した。



線形な市場におけるコール型オプションのヘッジ戦略の形状 (熱方程式の解)



非線形な市場におけるコール型オプションのヘッジ戦略の形状 (Burgers 方程式の解)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masaaki Fukasawa and Jan Obloj	4. 巻 -
2. 論文標題 Efficient discretisation of stochastic differential equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Stochastics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/17442508.2019.1666131	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fukasawa Masaaki, Stadje Mitja	4. 巻 22
2. 論文標題 Perfect hedging under endogenous permanent market impacts	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Finance and Stochastics	6. 最初と最後の頁 417 ~ 442
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00780-017-0352-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Bouchard Bruno, Fukasawa Masaaki, Herdegen Martin, Muhle-Karbe Johannes	4. 巻 22
2. 論文標題 Equilibrium returns with transaction costs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Finance and Stochastics	6. 最初と最後の頁 569 ~ 601
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00780-018-0366-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Alos Elisa, Fukasawa Masaaki	4. 巻 31
2. 論文標題 The asymptotic expansion of the regular discretization error of It <sup>?</sup> integrals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Finance	6. 最初と最後の頁 323 ~ 365
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1111/mafi.12292	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Masaaki Fukasawa
2. 発表標題 Perfect hedging under endogenous permanent market impacts
3. 学会等名 Advances in Stochastic Analysis for Risk Modeling (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Martin Herdegen
2. 発表標題 Equilibrium returns with transaction costs
3. 学会等名 Bachelier Congress (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaaki Fukasawa
2. 発表標題 The asymptotic expansion of the regular discretization error of Ito integrals
3. 学会等名 Advanced Methods in Mathematical Finance (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Workshop on Financial Risks and Their Management	開催年 2019年～2019年
--	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スペイン	UPF			
英国	Warwick University			
フランス	Paris Dauphine University			
ドイツ	Ulm University			
アメリカ	Carnegie Mellon University			