

令和 3 年 5 月 5 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05299

研究課題名（和文）対称マルコフ過程の大域的性質の解析

研究課題名（英文）Analysis of global properties of symmetric Markov processes

研究代表者

塩沢 裕一（Shiozawa, Yuichi）

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：60454518

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、ユークリッド空間上の飛躍型対称マルコフ過程の大域的性質やマルコフ半群の関数解析的性質を、対応するディリクレ形式の係数や飛躍核、および空間次元を通じて具体的に特徴づけた。さらに、非対称な飛躍型マルコフ過程が重複対数型の挙動を示すための十分条件を、飛躍核の2次モーメントの存在性等を通じて与えるとともに、分枝ブラウン運動の最大値過程の大域的性質や末尾分布の漸近挙動を解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率過程の長時間挙動の解析は、でたらめさの織り成す現象をとらえることであり、確率論の基本的な研究課題の一つである。本研究結果は、マルコフ過程の長時間挙動に関して、空間非一様性に起因する様々な現象の解析的および定量的特徴づけを与えている。このような特徴づけを通じて、マルコフ過程の大域的性質を詳しく理解できる。本研究結果は確率過程論と解析学との関係によるものであり、解析学の諸分野とも関わりを持つ。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we characterized the global properties of a jump-type symmetric Markov process and the functional analytic properties of a Markov semigroup in terms of the spatial dimension, and of the coefficients and jumping kernel of the associated Dirichlet form. We further provided a sufficient condition for the LIL-type asymptotic properties of a non-symmetric jump process in terms of the existence of the second moment of the jumping kernel. We also revealed the global properties and the asymptotic properties of the tail distribution for the maximal displacement of a branching Brownian motion.

研究分野：確率過程論

キーワード：マルコフ過程 ディリクレ形式 分枝ブラウン運動

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率過程とは、個体が空間内でランダムに運動する様子を記述した数学モデルのことである。確率過程の長時間挙動を解析することは、ランダムさの織り成す興味深い現象をとらえることであり、確率論の基本的な研究課題の一つである。確率過程の中で、「個体の現時点での状態が分かっているとき、未来の挙動が過去とは独立している」という性質(マルコフ性)を持つものをマルコフ過程と呼ぶ。マルコフ過程の性質は、対応するマルコフ半群とその生成作用素を通じて、解析的に調べることができる。

ディリクレ形式の理論は、自乗可積分な関数空間上の二次形式を通じて、緩やかな条件下で(対称)マルコフ過程を構成し解析する方法を与える。この理論は、解析学や幾何学を巻き込みながら、今日に至るまで発展し続けている。この理由の1つとして、ディリクレ形式の理論が解析的および幾何学的な特異性に強いことが挙げられる。ところが、確率微分方程式による確率過程の直接的な構成および表現とは異なり、ディリクレ形式の持つ解析的・幾何的情報と、対応する対称マルコフ過程の性質との関係は一般には非自明である。この関係を調べることは、経路の性質を解析する点において、確率過程論における基本的問題の1つである。

連続経路を持つ対称拡散過程については、経路の解析手法が確立されており、膨大な研究成果が蓄積されている。他方、不連続経路を持つ飛躍型マルコフ過程については、経路の形がより複雑になり、ディリクレ形式も非局所型になることから、解析を行う上で困難が生じる。飛躍型マルコフ過程の飛躍核が本質的に空間一様な場合には、国際研究グループの系統的な研究により、困難が克服されている。実際、熱核の精密な評価やマルコフ半群の解析的性質などが解明されている。しかし、飛躍核が空間非一様な場合には、例えば過度性や爆発などの基本的性質の成立条件についても未解明な状態であった。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、研究代表者のこれまでの研究を押し進め、1で述べた「ディリクレ形式の持つ解析的および幾何的情報と、対応する対称マルコフ過程の性質との関係」の一端を明らかにすることである。ここでは非局所型ディリクレ形式および飛躍型マルコフ過程の解析に焦点を絞り、空間次元やディリクレ形式の係数および飛躍核の挙動などが、経路やマルコフ半群の性質に与える影響を解明することを目指した。

3. 研究の方法

無限遠方での非有界/退化係数を持つ非局所型ディリクレ形式について、対応する飛躍型マルコフ過程の大域的性質やマルコフ半群の関数解析的性質と、係数や飛躍核の挙動との関係を調べた。また、マルコフ過程の大域的性質への理解を深める観点から、非対称な飛躍型マルコフ過程の経路解析や、分枝ブラウン運動の最大値過程の大域的性質や末尾分布の解析にも取り組んだ。

4. 研究成果

(1) [非局所型ディリクレ形式の係数増大とマルコフ半群の性質との関係]

自乗可積分なルベグ空間上の非局所型ディリクレ形式であって、無限遠方での非有界/退化係数を持つものに対して、生成されるマルコフ半群の確率論的および関数解析的性質を解析し、以下の結果を得た。

(1-1) (Jian Wang 氏 (Fujian Normal University) との共同研究) マルコフ半群がコンパクトおよび非コンパクトになるための十分条件を、係数の無限遠方での増大度によって与えた。特に、あるクラスのディリクレ形式については、半群がコンパクトになるための必要十分条件を与えた。

強局所型ディリクレ形式については、対応するマルコフ半群のスペクトルの性質が、係数の無限遠方での増大度によって特徴付けられている。本研究課題に取り組んだ動機は、ディリクレ形式の非局所性が、マルコフ半群のスペクトルの性質に与える影響を捕らえることであった。本研究の成果として、正則ディリクレ形式が構成できるような設定の下では、大きな飛躍に対応する係数の挙動はマルコフ半群のコンパクト性には影響を与えないことが明らかとなった。また、本研究の成果は、非局所型ディリクレ形式について、係数増大度が大きい場合に、対応するマルコフ半群の性質を明らかにした最初のものである。

(1-2) ディリクレ形式が過度的あるための十分条件を、係数の無限遠方での増大度/退化度によって与えた。特にあるクラスのディリクレ形式については、過度性の必要十分条件を与える

ことができた。(1-1)とは異なり,空間次元やディリクレ形式の非局所性が過度性の成立に影響を与えることが分かった。

(2)[飛躍型マルコフ過程の重複対数型の挙動](Jian Wang氏(Fujian Normal University)との共同研究)

対称レビ過程は,レビ核の2次モーメントが有限であれば,重複対数の法則をみたすことが知られている。本研究課題では,飛躍核が2次モーメント有限である飛躍型マルコフ過程の経路解析を行い,以下の結果を得た。

(2-1)自乗可積分なルベーク空間上の対称な非局所型ディリクレ形式であって,飛躍核が2次モーメント有限なものについて,対応する飛躍型マルコフ過程の熱核の精密な評価を与えた。この評価を用いて,飛躍型マルコフ過程がブラウン運動と類似の脱出レートを持つことを明らかにした。

(2-2)不連続経路を持つようなユークリッド空間上のフェラー過程は,飛躍核の2次モーメント有限性を含む適切な状況の下では,2次変動が有界なマルチンゲールになることを示した。この結果を応用して,飛躍型マルコフ過程が重複対数型の挙動を示すための十分条件を導出した。以上で述べた結果は,下に有界な半ディリクレ形式から生成される(非対称)飛躍型マルコフ過程に対しても成立する。

(3)[分枝ブラウン運動の最大値過程の解析]

ユークリッド空間上の分枝ブラウン運動であって,コンパクト台を持つ加藤クラス測度を分枝率に持つようなものの最大値過程の解析を行い,以下の結果を得た。

(3-1)最大値過程は線形増大し,その増大度が分枝率から定まるシュレディンガー型作用素の最小固有値で決定されることを示した。また,臨界球の外側にある個体数の多項式増大度の評価を得た。本成果は,先行研究とは異なり,状態空間が多次元かつ,分枝率が球対称性を有さない状況を許容している。ファインマン・カツ半群のupper deviation型の評価を示すことが証明の鍵であった。

(3-2)(西森 康人氏(阿南工業高等専門学校)との共同研究)(4-1)での手法を推し進め,最大値過程の末尾確率の長時間挙動を決定した。特に,最大値過程の2番目のオーダーが対数項であり,その係数が空間次元から定まることを特定した。この事実は,空間非一様な分枝率を持つ分枝ブラウン運動においては,本研究で初めて明らかにされた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shiozawa Yuichi	4. 巻 63
2. 論文標題 Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Illinois Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 353 ~ 402
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/00192082-7854864	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shiozawa Yuichi, Wang Jian	4. 巻 25
2. 論文標題 Long-time heat kernel estimates and upper rate functions of Brownian motion type for symmetric jump processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bernoulli	6. 最初と最後の頁 3796 ~ 3831
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3150/19-BEJ1111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shiozawa Yuichi	4. 巻 155
2. 論文標題 Spread Rate of Branching Brownian Motions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Acta Applicandae Mathematicae	6. 最初と最後の頁 113 ~ 150
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10440-017-0148-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件（うち招待講演 9件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Yuichi Shiozawa
2. 発表標題 Limiting distributions for the maximal displacement of branching Brownian motions
3. 学会等名 The first China-Japan-Korea probability workshop（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 塩沢 裕一
2. 発表標題 分枝ブラウン運動の粒子配置の解析
3. 学会等名 談話会（東北大学理学研究科）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 塩沢 裕一
2. 発表標題 Limiting distributions for the maximal displacement of branching Brownian motions
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuichi Shiozawa
2. 発表標題 Limiting distributions for the maximal displacement of branching Brownian motions
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 塩沢 裕一，西森 康人
2. 発表標題 Limiting distributions for the maximal displacement of branching Brownian motions
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuichi Shiozawa
2. 発表標題 Forefront of branching Brownian motions
3. 学会等名 大規模相互作用系の確率解析
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuichi Shiozawa
2. 発表標題 Spread rate of branching Brownian motions
3. 学会等名 14th Workshop on Markov Processes and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 塩沢 裕一
2. 発表標題 Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions
3. 学会等名 福岡大学確率論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 塩沢 裕一
2. 発表標題 Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions
3. 学会等名 関西確率論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 塩沢 裕一
2. 発表標題 分枝ブラウン運動の最大値過程の解析
3. 学会等名 早春セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 塩沢裕一
2. 発表標題 Spread rate of branching Brownian motions
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 塩沢裕一
2. 発表標題 Spread rate of branching Brownian motion
3. 学会等名 関西大学確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuichi Shiozawa
2. 発表標題 Upper rate functions of Brownian motion type for symmetric jump processes
3. 学会等名 Workshop on Jump Processes and Stochastic Analysis（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuichi Shiozawa
2. 発表標題 Spread rate of branching Brownian motions
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuichi Shiozawa
2. 発表標題 Spread rate of branching Brownian motions
3. 学会等名 セミナー (福建師範大学) (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 塩沢裕一
2. 発表標題 Spread rate of branching Brownian motions
3. 学会等名 東北確率論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 塩沢裕一
2. 発表標題 Upper rate functions of Brownian motion type for symmetric jump processes
3. 学会等名 数理ファイナンスセミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 塩沢裕一
2. 発表標題 Upper rate functions of Brownian motion type for symmetric jump processes
3. 学会等名 福岡大確率論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 塩沢裕一
2. 発表標題 Upper rate functions of Brownian motion type for symmetric jump processes
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~shiozawa/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------