

令和 3 年 5 月 10 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05302

研究課題名(和文) 予測理論の新手法による動的確率従属性解析とそのファイナンスへの応用

研究課題名(英文) Dynamic stochastic dependency analysis by new prediction theoretic method and its applications to finance

研究代表者

井上 昭彦 (Inoue, Akihiko)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・教授

研究者番号：50168431

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：自己回帰移動平均 (ARMA) 過程は、応用上重要な定常時系列のモデルである。本研究は、研究代表者等により発展させられてきた予測理論の新手法を用いて、一般の多変量ARMA過程の有限予測係数の閉形式表示を求めた。この閉形式表示は、スペクトル密度の分解に現れる2つの行列値外部関数の極の言葉により与えられる。この閉形式表示の著しい点は、有限予測係数を線形時間 $O(n)$ で計算する超高速なアルゴリズムを与えることである。 $O(n)$ より早いアルゴリズムは存在しないので、これは理想的な超高速アルゴリズムである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自己回帰移動平均過程は、ほとんどの時系列の教科書で扱われる基本的な定常時系列のモデルである。一方、定常時系列モデルを応用に利用する場合に最も基本的な量は、その有限予測係数である。有限予測係数は、Yule-Walker方程式というToeplitz方程式の解となっている。一般にToeplitz方程式を $O(n^2)$ より高速で解くアルゴリズムは、超高速 (superfast) とよばれる。本研究で得られた一般の多変量ARMA過程の有限予測係数に対する閉形式表示は、その有限予測係数を可能なもので最も高速な線形時間 $O(n)$ で計算する超高速なアルゴリズムを与えるもので、応用上重要な結果といえる。

研究成果の概要(英文)：The autoregressive-moving average (ARMA) process is an important stationary time series model for applications. In this study, we obtained a closed-form representation of the finite predictor coefficients of general multivariate ARMA processes using a new prediction theoretic method developed by the principal investigator and others. This closed-form representation is given in terms of the poles of the two matrix-valued outer functions that appear in the decompositions of the spectral density. The remarkable point of this closed-form representation is that it provides a superfast algorithm that calculates the finite predictor coefficient in linear time $O(n)$. This is an ideal superfast algorithm, as no algorithm is faster than $O(n)$.

研究分野：確率論

キーワード：自己回帰移動平均過程 有限予測係数 閉形式表示 線形時間アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

(1) 本報告における有限予測とは、離散時間あるいは連続時間の定常過程や定常増分過程等の確率過程に対する有限の過去からの線形予測のことである。本研究課題のタイトル中の予測理論的新手法とは、有限予測に現れる種々の量 (以下、これらを有限予測的量とよぶ) に対する一群の表現定理とその応用のことで、(i) 有限予測誤差に対する表現定理 (、 等)、(ii) 偏相関関数に対する表現定理 (、 等)、(iii) 有限予測係数に対する表現定理 (、 等)、などを指す。これらの有限予測における表現定理の原形は、において、実 1 変量定常過程の有限予測誤差に対し、偏相関関数の漸近挙動を求める目的の副産物として、研究代表者により見出された。その際、von Neumann の交互射影定理と定常過程に対する過去と未来の交差性という性質を組み合わせるというアプローチを導入した。このアプローチは単純ではあるが発展性があり、有限予測における種々の表現定理を示す際の基調をなしている。その後、そのような表現定理が偏相関関数や有限予測係数といった他の有限予測的量に対しても存在することが分かり、一連の論文で整備・応用されるとともに、連続時間の設定にも拡張されていった。その内、は 1 変量偏相関関数の表現定理を示し、それを応用して、代表的な長期記憶モデルである FARIMA モデルに対し偏相関関数の漸近挙動を決定した。また、研究代表者と分担者の共著は、1 変量有限予測係数に対する表現定理を示し、それをを用いて、AR ふるいブートストラップ等に応用のある Baxter の不等式を、1 変量長期記憶モデルに対して初めて証明した。一方、Anh 氏と研究代表者および分担者の 2005 年の共著論文では、やはり 2005 年の Anh 氏と研究代表者の共著論文により導入されたあるクラスの連続時間定常増分伊藤過程に対し、上記の離散時間の場合と同様のアプローチで有限予測誤差と有限予測係数の表現定理を示した。さらに、Anh、中野両氏と研究代表者の 2006 年の共著論文は、上記の 2005 年の論文で扱われたクラスに属する特別な確率過程に対し、新生過程による閉形式表現を与えたが、この結果は中野氏と研究代表者の 2007 年の共著論文や森内、仲村両氏と研究代表者の 2015 年の共著論文等でファイナンスのモデリングに応用された。

(2) 上記は、すべて 1 変量過程に対する結果である。これらの結果を多変量過程の有限予測に拡張するという試みは、すでに 2005 年夏に Pourahmadi 氏が札幌に長期滞在している間に、研究代表者、分担者、Pourahmadi 氏との間で行われた。この問題を提起したのは、Pourahmadi 氏であった。しかしその時は、研究代表者たちは 1 変量と多変量の違いを痛感しただけで終わってしまった。多変量の場合の難しさとして、行列の非可換性がある。上記の 1 変量過程の場合の有限予測における表現定理の証明法では、考える量をまず AR 係数および MA 係数で無限級数表示した後で、Fubini の定理を用いてそれを β と名付けた量による表示にまとめた。その際、無限級数に現れるスカラー量の積の順序交換を行う。しかし、多変量になると、これらの積は行列の積に変わるので、同様の積の順序交換はできなくなり、そこで 1 変量の場合の議論は破綻してしまう。多変量の場合の別の難しさとして、時間反転に関することがある。有限予測における表現定理の証明では、最初の の時から一貫して、元の定常過程を時間反転して得られる定常過程が重要な役割を果たす。1 変量の場合、元の定常過程とその時間反転はほとんど同じものである。実際、元の定常過程の外部関数に対し、時間反転した定常過程の外部関数は、べき級数展開の係数の複素共役を取るだけで得られる。ところが、2 変量以上の定常過程とその時間反転に関しては、外部関数の間にそのような簡単な関係は知られていない。このことは、多変量過程の解析を著しく難しくする。上記の 2005 年の試みの後、この多変量有限予測への拡張の問題は未解決の状態におかれていた。ところが、2011 年 1 月、研究代表者および広島大学を訪問中の分担者は、突然、この問題の解決の見通しを得た。研究代表者と分担者そして Pourahmadi 氏は、このブレーク・スルーを基に 2005 年のプロジェクトを再開し、最終的に、において有限予測における表現定理を多変量に拡張し、またそれを応用して の 1 変量長期記憶モデルに対する Baxter の不等式を多変量に拡張するなどの結果を得た。同時に、それまでの 1 変量過程に関する種々の表現定理から余分な条件を外し、理想的な形に改良した。

2. 研究の目的

(1) 予測理論的新手法による動的確率従属性解析手法の開発。Anh、中野両氏と研究代表者の 2006 年の共著論文では、予測理論的新手法により、ある非常に特別な場合の連続時間の伊藤 ARMA 型の定常増分過程に対し、新生過程とよばれるブラウン運動による元の定常増分過程の明示表現公式を導いていた。これにより、伊藤解析をこの確率過程に応用することができるようになる。この結果を、より一般の伊藤 ARMA 型の定常増分過程に拡張する。

(2) 予測理論新手法の多次元確率過程への拡張。研究代表者と分担者および Pourahmadi 氏による、では、予測理論新手法を多次元確率過程への拡張するブレーク・スルーを行ったが、この方面の研究をさらに発展させる。

(3) 予測理論的新手法の Baxter の不等式への応用。予測理論的新手法と Baxter の不等式の証明は、大変、相性がよい。この方面の研究をさらに発展させる。

(4) 多変量過程の対する 2 つの外部関数の間の関係。多変量過程の場合の難しさの一つに、2 つの外部関数の間の関係が不明であることが挙げられる。この問題点を解消していく。

3. 研究の方法

(1) で導入され、1 変量過程に対し適用されてきた従来の予測理論的新手法。すなわち、(1) von Neumann の交互射影定理と定常過程や定常増分過程に対する過去と未来の交差性という性質を組み合わせるというアプローチ、(2) 様々な有限予測的量に対し、beta による明示表現を導き、その明示表現を元に、解析を行うという方法。

(2) 1 変量過程に対する予測理論的新手法を多変量過程に拡張するブレーク・スルーを行った研究代表者、分担者、Pourahamadi 氏による論文 では、互いに関係する 3 つの要素を組み合わせた手法が重要な役割を果たした。それら 3 つの要素とは、以下の通りである：(i) AR 係数や MA 係数による表示というよりも、beta による表示を直接導くという基本方針、(ii) von Neumann の交互射影定理と過去と未来の交差性を組み合わせた議論の改良、(iii) 前進および後進新生過程を基底として使用すること。これらの予測的新手法における新たな発展も、さらに利用する。

4. 研究成果

(1) 研究代表者と仲村氏は、現在準備中の共著論文で、1 次元連続時間の伊藤 ARMA 型の定常増分過程に対する予測理論的新手法を進展させ、新生過程とよばれるブラウン運動による元の定常増分過程の明示表現公式を導いた。これは、予測理論的新手法に基づく確率過程の動的従属性の理論の基礎となる結果である。このアイデアを、技術的にはより簡単な離散時間の 1 次元 ARMA 過程に適用すると、その偏相関関数および予測誤差に対する閉形式表示が得られる。この結果は、研究代表者と分担者の共著 で発表された。

(2) 予測理論的新手法を多変量過程に適用する場合の難しさとして、2 つの外部関数の間の対応に関することがある。すなわち、 w を離散時間多変量定常過程のスペクトル密度とすると、 w には 2 種類の行列値外部関数による分解がある。それらの外部関数は、大雑把には、元の確率過程とそれを時間反転した確率過程に、それぞれ対応する。有限予測における表現定理とは、基本的には、それら 2 つの外部関数から得られる相関数とよばれるユニタリ行列値関数のフーリエ係数による無限級数表現である。定常過程を与えることと外部関数を与えることは、大体同じであるので、時間反転した確率過程の外部関数は、元の確率過程の外部関数から求めなければならない。ところが、これら 2 つの外部関数の間の対応については、ほとんど何も分かっていなかった。1 変量の場合には 2 つの外部関数は同じとすればよいので、これは多変量特有の問題である。研究代表者は で、多変量 ARMA 過程の場合には、2 つの外部関数の極は、重複度も含めて完全に一致するという結果を示した。この結果は、この問題に関するものとしては最初のものである。

(3) 離散時間定常過程の予測理論において、有限予測係数、すなわち有限の過去からの線形予測子の係数は、最も基本的な量である。一方、離散時間定常過程の中で、自己回帰移動平均過程 (Auto-Regressive Moving-Average 過程、略して、ARMA 過程) は、最も基本的で応用によく用いられるモデルであり、定常時系列の教科書では必ず扱うモデルである。ARMA 過程というと、通常は 1 次元 ARMA 過程を指すが、多次元 ARMA 過程を考える場合もある。多次元 ARMA 過程を一般的に考えれば 1 次元 ARMA 過程の場合も含まれるわけであるが、1 次元と多次元の間には取り扱いの難しさに大きなギャップがある。もちろん、多次元の方が、はるかに扱いが難しい。本研究課題において得られた最大の成果は、一般の多次元 ARMA 過程の有限予測係数の閉形式表示である。この閉形式表示は、考える多次元 ARMA 過程のスペクトル密度の分解に現れる 2 つの行列値外部関数の極の情報 (極の位置や位数等) によるものである。この結果の証明には、研究代表者等により発展させられてきた予測理論的新手法を用いる。ARMA 過程の有限予測係数に対する閉形式表示は、有限予測係数を計算する超高速 (superfast) なアルゴリズムを与える。また、その閉形式表示は、有限予測係数の漸近挙動を調べる強力な道具ともなる。後者に関して、研究代表者は、有限予測係数に対する閉形式表示を用いて、有限予測係数からなるある和の漸近挙動を決定した。この和は、AR モデルのあてはめの一貫性を示す際や、AR ふるいブートストラップ等に現れる。この和は Baxter の不等式とよばれるものにより上からの評価できることは知られていたが、研究代表者の結果は、その和の完全な漸近挙動を決定したものである。以上の結果は、研究代表者により で発表された。

< 引用文献 >

A. Inoue, Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process, J. Anal. Math., 81, 2000, 65-109.

A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with

applications, *Probab. Theory Related Fields*, 140, 2008, 523-551.

井上 昭彦, 有限予測における表現定理とその応用, *数学*, 71, 2019, 302-324.

A. Inoue, Closed-form expression for finite predictor coefficients of multivariate ARMA processes, *J. Multivariate Anal.*, 176, 2020, 104578, 18 pp.

A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, *Ann. Statist.*, 34, 2006, 973-993.

A. Inoue and Y. Kasahara, Simple matrix representations of the orthogonal polynomials for a rational spectral density on the unit circle, *J. Math. Anal. Appl.*, 464, 2018, 1366-1374.

A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, The intersection of past and future for multivariate stationary processes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144, 2016, 1779-1786.

A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes, *Bernoulli*, 24, 2018, 1202-1232.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akihiko Inoue	4. 巻 176
2. 論文標題 Closed-form expression for finite predictor coefficients of multivariate ARMA processes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Multivariate Analysis	6. 最初と最後の頁 104578
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmva.2019.104578	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 井上 昭彦	4. 巻 71
2. 論文標題 有限予測における表現定理とその応用	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 302-324
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Inoue Akihiko, Kasahara Yukio	4. 巻 464
2. 論文標題 Simple matrix representations of the orthogonal polynomials for a rational spectral density on the unit circle	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 1366 ~ 1374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.04.062	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kasahara Yukio, Bingham Nicholas H.	4. 巻 291
2. 論文標題 Matricial Baxter's theorem with a Nehari sequence	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2590 ~ 2598
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201700147	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Inoue Akihiko, Kasahara Yukio, Pourahmadi Mohsen	4. 巻 24
2. 論文標題 Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Bernoulli	6. 最初と最後の頁 1202 ~ 1232
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3150/16-BEJ897	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kasahara Yukio, Bingham Nicholas H.	4. 巻 220
2. 論文標題 Coefficient stripping in the matricial Nehari problem	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Approximation Theory	6. 最初と最後の頁 1 ~ 11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jat.2017.04.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 井上 昭彦
2. 発表標題 テプリッツ行列の逆に対する表現定理とその応用
3. 学会等名 2019年度確率論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 井上 昭彦
2. 発表標題 多変量ARMA 過程の有限予測係数に対する閉形式表示
3. 学会等名 2018年度確率論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤本 智博、井上 昭彦、清水 亮
2. 発表標題 定常過程に対するMA ブートストラップ
3. 学会等名 2018年度確率論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井上 昭彦
2. 発表標題 新生過程の明示公式とファイナンスへの応用
3. 学会等名 ファイナンスの数理解析とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井上 昭彦
2. 発表標題 テプリッツ系に対する Baxter 型収束定理
3. 学会等名 2020年度確率論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

井上昭彦のホームページ https://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/ Akihiko Inoue's Homepage https://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/index-e.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	笠原 雪夫 (Kasahara Yukio) (10399793)	北海道大学・理学研究院・研究院研究員 (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関