

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05305

研究課題名(和文)非線形シュレディンガー方程式の解の減衰と爆発に関する研究

研究課題名(英文)Research for decay and blow-up of solutions to nonlinear Schrodinger equations

研究代表者

北 直泰 (Kita, Naoyasu)

熊本大学・大学院先端科学研究部(工)・教授

研究者番号：70336056

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：非線形消散項をもつ非線形シュレディンガー方程式(NS)を解き、その解の減衰オーダーを特定することができた。NLSは、光ファイバー中を伝わる信号(=電磁波)の様子をモデル化したものである。特に、本研究で取り扱ったモデルは、不純物の効果で信号が弱まる様子を記述するものである。非線形項のベキがBarab-Ozawaの臨界ベキの場合に、解の L^1 ノルムが $t^{-1/2}(\log t)^{-1/2}$ のオーダーで減衰すること、解の L^2 ノルムの減衰オーダーがデータの正則性に応じて $(\log t)^{-1/2}$ の減衰に近づくことを示した。なお、これらの減衰オーダーの最適性も示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

【産業的な意義】光ファイバーの中を伝わる信号が何km伝わるごとにその強さが半分になるのか、定量的に算出することができた。これは、信号増幅器を何kmおきに設置すれば良いのか見積もりができるという点で意義がある。数値シミュレーションで信号の減衰を予測する場合には、差分化の精度やプログラムの安定性が懸案になるため、結果の信頼性に疑問が付きまとう。しかし、数学的な解析によって得られた結果には、そのような不備が無いところに利点がある。

研究成果の概要(英文)：In this research, we considered decay rates of the solutions to dissipative nonlinear Schrodinger equations. A nonlinear Schrodinger equation modes the evolution of pulses (or electro-magnetic waves) propagating through optical fibers. In particular, the model treated in this research describes how a pulse is weakened by the impurities lying the optical fiber. We could reveal that, if the power of nonlinearity is Barab-Ozawa's critical (or sub-critical), the L^1 -norm of the solution decays like $t^{-1/2}(\log t)^{-1/2}$, and the L^2 -norm decays dependently on the regularity of the data but the decay rate tends to $(\log t)^{-1/2}$ as the regularity of the data is refined. In our research, the optimality of these decay rates is also proved. The word "optimality" means that, if a solution decays more rapidly than $t^{-1/2}(\log t)^{-1/2}$ in L^1 (or $(\log t)^{-1/2}$ in L^2), then the solution must be trivial (identically equal to 0).

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：非線形分散型方程式 解の減衰評価 解の漸近挙動 非線形シュレディンガー方程式

1. 研究開始当初の背景

1970 年後半に増幅型光ファイバーの実験が盛んに行われ、弱まった信号の強度回復に成功した。増幅型光ファイバーとは、石英にエルビウムイオンを添加した光ファイバーである。その物理的特性について説明すると、特定振動数をもつレーザーをこのファイバーに照射することで、エルビウム原子核のまわりにある電子が高いエネルギー準位に励起される。この状態で、弱まった信号がファイバーに入ってくると、励起状態にある電子が揺さぶりを受けて、元の低いエネルギー準位に落ちる。電子の転落によって発生したエネルギーギャップが光となって放出されるので、弱まった信号の強度を回復する効果がある。この効果をエルビウム添加型ファイバー増幅 (Erbium Doped Fiber Amplifier) と言う。この言葉は省略形で EDFA と呼ばれることが多い。

1990 年代に、物理学者 G.P.Agrawal によって、増幅型光ファイバーを伝搬する信号 (= 電磁波) の様子を表す数理モデルが提出された。それは、非線形シュレーディンガー方程式であるが、1 次の増幅項 (エルビウムイオンの効果を表す項: 図 1 の方程式中の $i\mu$ の項) と 3 次の Kerr 効果を表す項 (誘電率が電場の強さに依存して変化する効果を表す項: 図 1 の方程式中の λ_1 の項), および、3 次の消散項 (非線形オームの法則を表す項: 図 1 の方程式中の λ_2 の項) が含まれている。Agrawal はこの非線形シュレーディンガー方程式がソリトン解をもつことを示した。Agrawal が提出した非線形シュレーディンガー方程式をここでは、EDFA-NLS と呼ぶことにする。

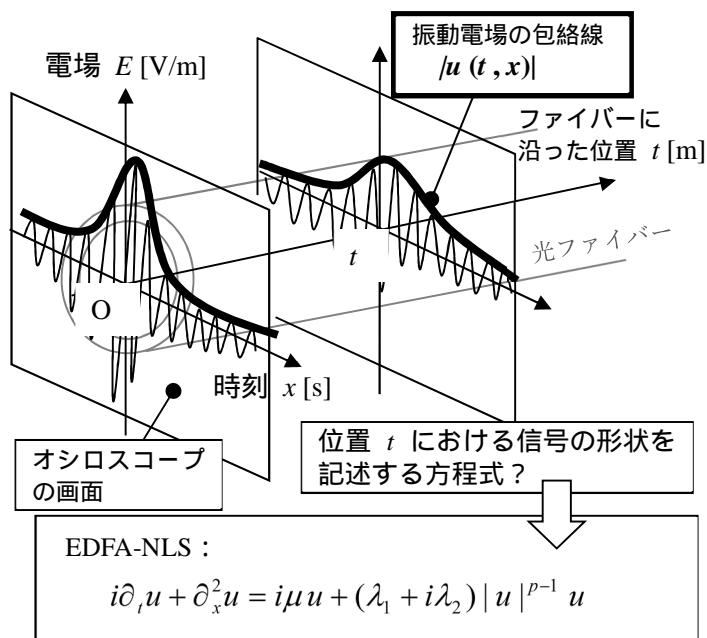


図 1 光ファイバー内の信号とEDFA-NLS

非線形シュレーディンガー方程式の研究が数学雑誌に掲載され始めたのは、1970 年代後半からである。当時は、 L^2 -ノルムやエネルギーのような保存量を利用して、時間局所解を時間大域解に繋げる手法が主流だったので、非線形シュレーディンガー方程式には、先述した EDFA-NLS に含まれるような 1 次の増幅項や 3 次の消散項は含まれていない。通常非線形シュレーディンガー方程式の数学解析では、以下の 4 項目が主な研究対象になる。

- (1) 解の存在・一意・安定性
- (2) 時間大域解の長時間挙動
- (3) 解の有限時間爆発
- (4) ソリトン解の存在およびその摂動に対する安定性

EDFA-NLS に対して、(1) の解析は容易である。(2) の解析については、1 次の増幅項が存在するため、困難である。(3) については、3 次の消散項の効果のため、解の有限時間爆発は期待できない。(4) については、1 次の増幅項と 3 次の消散項が存在するため、ハミルトン構造が壊れてしまうので、非線形項のベキを変えたりして一般論を構築することになると、新しい手法が必要になる。研究開始当初はこのような状況であった。

2. 研究の目的

解の漸近挙動を調べる際に、EDFA-NLS に含まれる 1 次の増幅項の存在は非常に厄介である。それは、非線形項の影響をいつまでも残す効果があるから。そこで、まず、1 次の増幅項を落として、消散型非線形項がシュレーディンガー方程式の解にどのような影響を与えるのか調べることにした。研究項目として、以下の 3 つを掲げる。

- (1) 解の L^∞ -ノルムの「最適な」減衰オーダーを特定
- (2) 解の L^2 -ノルムの「最適な」減衰オーダーを特定
- (3) 消散型非線形項のベキ p が劣臨界に場合に、 p をどこまで下げられるか?

3. 研究の方法

非線形分散型方程式の解の漸近解析では, Hayashi-Naumukin によって確立された手法があるので,これを基軸にして新しい困難の克服と新しい問題の創出に励むことになる。近年,日本では,非線形分散型方程式の解の漸近解析を専門とする博士課程の学生や若手研究者が増えてきた。特に,本研究課題に近いところに興味を抱くポスドク研究者がいるので,彼らと共同で研究を進めた。

4. 研究成果

以下に研究期間中に公表された研究成果を報告する。消散型非線形シュレーディンガー方程式以外の方程式についても解の漸近挙動に関する研究を行った。

[1] N. Kita, Y. Nakamura, Large time behavior of small solutions to multi-component nonlinear Schrödinger equations related with spinor Bose-Einstein condensate, *Linear and Nonlinear Analysis (Yokohama Publ. Special Issue) 5(1)* (2019), 73-85.

この論文では,行列値の未知関数をもつ非線形シュレーディンガー方程式について,解の漸近挙動を特定している。この方程式に含まれている非線形項のベキは3次である。通常非線形シュレーディンガー方程式では未知関数は複素数値である。行列と複素数で大きく異なることは,積の交換法則が無いと有るかという点である。この違いが解の漸近挙動や証明法にどのような影響を与えるのか調べるのがこの論文の主眼である。わかったことは,行列値の場合に,非線形項の係数によって漸近自由になることである。これは,連立系の方程式でしばしば登場する null condition に相当するものであろう。証明の際に,積の交換が成り立たないことから,ゲージ変換による漸近挙動の特定で工夫が必要になったことを注意点として書き留めておく。

[2] N. Kita, Y. Nakamura, Decay estimate and asymptotic behavior of small solutions to Schrödinger equations with subcritical nonlinearity, *Advanced Study of Pure Mathematics 81* (2019), 121-138.

この論文では,空間1次元の消散型シュレーディンガー方程式の解について,その減衰評価と漸近挙動を考察している。消散型非線形項のベキは p 次(3未満)である。Kita-Shimomura による既存の結果では,非線形項のベキがどこまで下げられるのか明示されていなかった。そこで,この論文では,非線形項のベキがどこまで下がるのか明示することが目的になっている。評価の煩雑さは, $\|J u(t)\|_{L^2}$ (ここで $J = x + it \partial_x$ である)の増大度に初期データの大きさ以外に $3-p$ の因子が現れてくるところである。証明が煩雑になるが,丁寧に評価を推し進めることで,非線形ベキ p の下限を明示することができた。

[3] N. Kita, Optimal decay rate of solutions to 1D Schrödinger Equation with cubic dissipative nonlinearity, *Journal of Applied Science and Engineering A 1(1)* (2019), 15-18.

この論文では,消散型非線形シュレーディンガー方程式(非線形項のベキは3次)の解について,その L^∞ -ノルムの減衰オーダーが $t^{-1/2}(\log t)^{-1/2}$ で最適であることを証明した。つまり,もし, $\|u(t)\|_{L^\infty} = o(t^{-1/2}(\log t)^{-1/2})$ であったとすると, $u = 0$ となることを証明した。Kita-Shimomura による既存の結果では, $\|u(t)\|_{L^\infty}$ の上からの評価として $t^{-1/2}(\log t)^{-1/2}$ が知られていたが,下からの評価はどうなるのか?という疑問に答えたことになる。証明では,非線形項から導かれる $\|u(t)\|_{L^4}$ を Hölder の不等式で下から L^2 -ノルムと L^1 -ノルムで救い上げることが鍵になる。

[4] N. Kita, T. Wada, Sharp asymptotic behavior of solutions to Benjamin-Ono type equations -- short range case, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 297* (2021), 1-12.

この論文では,非線形項のベキとして $p(>3)$ 次ものを取り込んだ Benjamin-Ono 方程式について,解の漸近展開を求めている。非線形項のベキが高いので,時刻において解は漸近自由になることがわかるが,漸近第2項に非線形項の影響が現れることがわかった。証明では,特殊な変換によって問題を非線形シュレーディンガー方程式の漸近解析に帰着させている。

[5] N. Kita, T. Sato, Optimal L^2 -decay of solutions to a nonlinear Schrödinger equation with sub-critical dissipative nonlinearity, *Nonlinear Differential Equations and Applications 29* (2022), no.41.

この論文では、空間 1 次元の消散型非線形シュレーディンガー方程式（非線形項のべきは p (<3) 次）の解について、その L^2 -ノルムの減衰オーダーが $t^{-1/(p-1)+1/2}$ で最適であることを証明した。つまり、もし、 $\|u(t)\|_{L^2} = o(t^{-1/(p-1)+1/2})$ であったとすると、 $u = 0$ となることを証明した。証明では、解の L^2 -ノルムの精密な減衰評価（減衰トップタームの係数まで明示する評価）が必要になる。

[6] N. Kita, T. Sato, Optimal L^2 -decay of solutions to a cubic dissipative nonlinear Schrödinger equation, *Asymptotic Analysis* 129 (2022), 505-517.

この論文では、消散型非線形シュレーディンガー方程式（非線形項のべきは 3 次）の解について、その L^2 -ノルムの減衰オーダーが $(\log t)^{-1/2}$ で最適であることを証明した。つまり、もし、 $\|u(t)\|_{L^2} = o((\log t)^{-1/2})$ であったとすると、 $u = 0$ となることを証明した。Ogawa-Sato による既存の論文では、データの正則性を高めると、 $\|u(t)\|_{L^2}$ の減衰オーダーが $(\log t)^{-1/2 + \varepsilon}$ であること。そして、Sato による既存の結果で、データが解析的正則性（フーリエ変換が指数減衰する関数空間）をもつと、 $\|u(t)\|_{L^2}$ の減衰オーダーが $(\log t)^{-1/2} (\log \log t)^{1/2}$ になることが知られている。これらの結果から、解の L^2 -ノルムの減衰オーダーはどんなに早くても $(\log t)^{-1/2}$ であることが推測される。実際に、この推測が正しいことをこの論文で証明した。証明では、解の L^2 -ノルムの精密な減衰評価（減衰トップタームの係数まで明示する評価）が必要になる。

[7] N. Kita, T. Sato, Optimal L^2 -decay of solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equation in higher space dimensions, *Journal of Differential Equations* 354 (2023), 49-66.

この論文では、空間 n 次元 ($n = 1, 2, 3$) の消散型非線形シュレーディンガー方程式（非線形項のべきは $1 + 2/n$ 次）の解について、その L^2 -ノルムの減衰オーダーが $(\log t)^{-n/2}$ で最適であることを証明した。つまり、もし、 $\|u(t)\|_{L^2} = o((\log t)^{-n/2})$ であったとすると、 $u = 0$ となることを証明した。証明では、解の L^2 -ノルムの精密な減衰評価（減衰トップタームの係数まで明示する評価）が必要になる。

[8] N. Kita, S. Masaki, J. Segata, K. Uriya, Polynomial deceleration for a system of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, *Nonlinear Analysis* (to appear).

この論文では、2 成分の未知関数をもつ非線形シュレーディンガー方程式の連立系を取り扱っている。非線形項は、ゲージ不変性がある 3 次のべき型である。単独の非線形シュレーディンガー方程式とは異なって、解の L^2 -ノルムが $t^{-1/2}$ よりも遅く減衰するという結果が得られた。これは、第 2 式の非線形項に含まれる \bar{u}_2 の効果が解の減衰を阻害していることによる。証明では、未知関数のゲージ変換と対角化の方法が用いられている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Naoyasu Kita, Takuya Sato	4. 巻 129
2. 論文標題 Optimal L^2 -decay of solutions to a cubic dissipative nonlinear Schrodinger equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 505 - 517
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoyasu Kita, Takeshi Wada	4. 巻 297
2. 論文標題 Sharp asymptotic behavior of solutions to Benjamin-Ono type equations -- short range case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 1 - 12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N.Kita	4. 巻 1
2. 論文標題 Optimal decay rate of solutions to 1D Schrodinger Equation with cubic dissipative nonlinearity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Applied Science and Engineering A	6. 最初と最後の頁 15 - 18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N.Kita, Y.Nakamura	4. 巻 5
2. 論文標題 Large time behavior of small solutions to multi-component nonlinear Schrödinger equations related with spinor Bose-Einstein condensate	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis (Yokohama Publ. Special Issue)	6. 最初と最後の頁 73 - 85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoyasu Kita, Yoshihisa Nakamura	4. 巻 5
2. 論文標題 Large time behavior of small solutions to multi-component nonlinear Schrödinger equations related with spinor Bose-Einstein condensate	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis (Yokohama Publ. Special Issue)	6. 最初と最後の頁 73 - 85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoyasu Kita, Taisei Matsukuma	4. 巻 1
2. 論文標題 The least number of intersection points in currency fluctuation and well-approximating line graph under constraints of the Elliott wave principle	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Science Nature	6. 最初と最後の頁 33--41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Naoyasu Kita, Yoshihisa Nakamura	4. 巻 81
2. 論文標題 Decay estimate and asymptotic behavior of small solutions to Schrodinger equations with subcritical dissipative nonlinearity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 120-137
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Naoyasu Kita
2. 発表標題 Existence of blowing-up solution to some Schrodinger equations including nonlinear amplification with small initial data
3. 学会等名 International Conference on Applied Science and Engineering (on line) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoyasu Kita
2. 発表標題 Applied Mathematics and Not Yet Applied Mathematics
3. 学会等名 International Conference of Mathematics and Mathematics Education (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 N.Kita
2. 発表標題 Nonlinear Schrodinger equation with delta-functions as initial data (including the case of triple delta-functions)
3. 学会等名 2019 Engineering Workshop (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N.Kita
2. 発表標題 Nonlinear Schrodinger equation with delta-functions as initial data
3. 学会等名 Japan-Mongolia Joint Workshop on Pure and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N.Kita
2. 発表標題 Optimal decay rate of global solutions to the Schrodinger equation with cubic dissipative nonlinearity
3. 学会等名 International seminar "Differential-Algebraic and Integro-Algebraic Systems of Equations : Numerical Methods and Applications to Control Problems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N.Kita
2. 発表標題 Decay rate of global solutions to the Schrodinger equation with cubic dissipative nonlinearity
3. 学会等名 the First International Conference of Applied Sciences and Engineering (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoyasu Kita
2. 発表標題 The Elliott wave in foreign currency fluctuation and its detection
3. 学会等名 The 4th International Conference on Basic Sciences 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoyasu Kita
2. 発表標題 Optimal decay of solutions to dissipative nonlinear Schrödinger equations
3. 学会等名 Seminar on PDE with Dissipative Structure 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoyasu Kita
2. 発表標題 Reduction of nonlinear Schrödinger equations with singular initial data into ODEs
3. 学会等名 RIMS Workshop : Qualitative Theory on ODEs and its Applications to Mathematica Modeling (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoyasu Kita
2. 発表標題 Optimal decay rate of solutions to some dissipative nonlinear Schrödinger equations
3. 学会等名 Mathematics of Schrödinger Equations and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoyasu Kita
2. 発表標題 Nonlinear Schrodinger equation in optical fiber engineering
3. 学会等名 CIMPA-2017 in Mongolia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 辻川亨, 北 直泰	4. 発行年 2022年
2. 出版社 学術図書出版社	5. 総ページ数 264
3. 書名 微分積分学入門	

1. 著者名 北 直泰	4. 発行年 2019年
2. 出版社 学術図書出版社	5. 総ページ数 148
3. 書名 基礎と応用 微分方程式入門	

1. 著者名 北 直泰	4. 発行年 2018年
2. 出版社 学術図書出版社	5. 総ページ数 144
3. 書名 微分方程式	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Schrodinger Operators and Related Topics	開催年 2020年～2020年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
モンゴル	モンゴル国立大学	モンゴル科学技術大学	モンゴル生命科学大学	
中国	Yanbian University			