

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05311

研究課題名（和文）非線型分散型方程式に於ける解の形状及び漸近挙動とそれに関連する関数空間

研究課題名（英文）Shapes of functions, asymptotic behavior and function spaces associated with solutions to nonlinear dispersive equations

研究代表者

佐々木 浩宣（Sasaki, Hironobu）

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：00568496

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、主に非線型分散型方程式に於ける散乱問題について考察した。次の研究成果を得た：

（1）非線型項が3次のオーダーを持つ関数であるような空間3次元の非線型クライン・ゴールドン方程式の散乱作用素が、入力データの滑らかさと減衰の強さを維持することを証明した。（2）非線型項が指数増大型の関数であるような空間2次元の非線型クライン・ゴールドン方程式の散乱作用素が、入力データの滑らかさと減衰の強さを維持することを証明した。（3）適当な条件を満たす相互作用ポテンシャルによる空間3次元の半相対論的ハートリー方程式の散乱作用素が、入力データの滑らかさと減衰の強さを維持することを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた成果を分かりやすく述べると、「入力データとして与えた関数（実験の世界では粒子に相当）が滑らかだったり、遠方で減衰するものであったら、滑らかな非線型相互作用によって変化した出力データも同程度以上の滑らかさや減衰性をもつことを示した」となる。純粋数学的には散乱の逆問題に 응용が可能と思われる。また、粒子の実験を行う際の有用なヒントにもなりうる。

研究成果の概要（英文）：In this study, we consider scattering problems for nonlinear dispersive equations. We obtain the following results:

(1) We considered the 3-dim. Klein-Gordon equations whose nonlinearity is cubic, and we proved that the scattering operator maintain the smoothness and decay of the input data. (2) We considered the 2-dim. Klein-Gordon equations whose nonlinearity behaves like $u(\exp(|u|^2)-1)$, and we proved that the scattering operator maintain the smoothness and decay of the input data. (3) We considered the semi-relativistic equation whose interaction potential satisfies some suitable conditions, and we proved that the scattering operator maintain the smoothness and decay of the input data.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非線型分散型方程式 散乱作用素 ソボレフ空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

<対象となる偏微分方程式>

非線型分散型方程式(例:非線型シュレディンガー方程式、ハートリー方程式、非線型クラインゴルドン方程式、非線型ディラック方程式、KdV 方程式)は、古典場や非線型波動を記述する重要な方程式であり、これまでに多くの研究がなされている。

<解の存在について>

一部の例外を除き、非線型分散型方程式は解析的に解を求めることは不可能である。そこで、関数解析学的手法(縮小写像の原理、調和解析学等)を用いて、解の存在定理を数学的に証明することが重要となる。更に、時間大域解の漸近挙動や形状(滑らかさ、減衰の速さ)を調べることは、純粋数学のみならず、物理学・工学的にも本質的な課題である。

<散乱問題>

時間大域解が時刻無限大で自由解(摂動項が無い方程式の解)へ漸近するとき、非線型項は「短距離型」とであるという。更にこのとき、波動作用素・散乱作用素の存在が予想される。非線型項が短距離型であることや散乱作用素の存在は、非線型効果が限定的であることを指し、種々の現象を理解するうえで大変有用な鍵となる。非線型分散型方程式に於ける散乱作用素の存在定理については、古くから多くの研究がなされているが、近年でも重大な結果が多く報告されている。一方で、いまだに解決されていない重要な問題も山積している。非線型クラインゴルドン方程式や非線型ディラック方程式は、非線型シュレディンガー方程式に比べ証明に使えるような道具が不足しているため未解決部分が多く、今後の解明が強く期待されている。

ここで散乱作用素たちの定義を詳細に述べたい。 $B(H)$ をヒルベルト空間 H の 0 近傍とし、もし以下の事柄が成立するとき波動作用素 $W:f \rightarrow g$ が $B(H)$ 上で定義される: $B(H)$ に属する入力データ $f(x)$ を与えると、「 f を初期データとする自由解」へ、時刻が負の無限大の時に H の位相で漸近する非線型解(初期データは g)が存在する。また、もし以下の事柄が成立するとき逆波動作用素 $V:f \rightarrow g$ が $B(H)$ 上で定義される: $B(H)$ に属する初期データ $f(x)$ を与えると、或る自由解(初期データは g)へ、時刻が正の無限大の時に H の位相で漸近する非線型解(初期データは f)が存在する。(g を出力データと呼ぶ。)合成写像 $V \circ W$ が定義できるとき、それを散乱作用素 S と呼ぶ。

<滑らかさと減衰性の保存>

非線型項と入力データ(x を変数とする関数)が滑らかであった場合、出力データも滑らかであることは、「散乱作用素 S によるソボレフ空間 H^s の 0 近傍の像 $S(B(H^s))$ が H^s 自身の部分集合となる」ことを示せば良く、それは古くから得られている結果である。一方、入力データが無遠慮で減衰している場合、出力データも同程度以上に減衰していることは、「 S による重み付きソボレフ空間 $H^s(s,w)$ の 0 近傍の像 $S(B(H^s(s,w)))$ が $H^s(s,w)$ 自身の部分集合となる」ことを示せば良い。この減衰性の問題は、非線型シュレディンガー方程式の場合は作用素 J (後述)が有効である一方、非線型クライン・ゴルドン方程式の場合は未解決であったが、研究代表者により、ある程度解決した。

2. 研究の目的

上で述べた、「滑らかさと減衰性の保存」について、更なる有用な定理を得ること。例えば、入力データがシュバルツ空間に属するとき、出力データも属することを示すこと。また、非線型項の滑らかさと出力データの性質の関係性を発見すること。

3. 研究の方法

(1) 調和解析学、双曲面上の幾何学、関数空間(ルベグ空間、ソボレフ空間、ベゾフ空間、ローレンツ空間)の諸理論を用いて研究を行う。

(2) 非線型シュレディンガー方程式の散乱問題に於いては、ガリレイ変換の生成作用素 J が有効である。この J を適当に修正することで、非線型クライン・ゴールドン方程式等の散乱問題へ応用できることが近年判明している。本研究では、修正された J を詳細に解析し、種々の方程式へ応用していく。

(3) 得られた手法をさらに改良することで、様々な非線型分散型方程式の重要な未解決問題への応用を図る。

(4) 得られた研究成果は、研究集会・学会での発表、国際学術雑誌への投稿・掲載を通して周知させる。

4. 研究成果

ここでは、3つの結果について報告する。

(A)(論文) H. Sasaki, The scattering problem for the three-dimensional cubic nonlinear Klein-Gordon equation with rapidly decreasing input data, J. Differential Equations 268 (2020), 7774--7802.

(概要) 非線型項 $N(u)$ が3次のオーダーを持つ関数であるような空間3次元の非線型クライン・ゴールドン方程式の散乱作用素 S が、入力データの滑らかさと減衰の強さを維持することを証明した。特に、「入力データが急減少関数であるとき、出力データも急減少関数である」ことを初めて証明した。さらに、「入力データが指数関数的に減衰し、更に或る条件を満たしているとき、対応する出力データ(とその偏導関数たち全て)も指数関数的に減衰する」も示した。証明のキーとなるのは「クライン・ゴールドン方程式と相性の良い微分作用素」及び「重み付き微分作用素の精密な解析」である。

(B)(論文) H. Sasaki, Remark on the scattering operator for the two-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation with exponential nonlinearity, Kyushu J. Math. 78 (2024), 91–117.

(概要) 非線型項 $N(u)$ が指数増大型の関数であるような空間2次元の非線型クライン・ゴールドン方程式の散乱作用素 S が、入力データの滑らかさと減衰の強さを維持することを証明した。特に、「入力データが急減少関数であるとき、それを散乱作用素で写した出力データも急減少関数となる」と「入力データが指数関数的に減衰し、更に或る条件を満たしているとき、対応する出力データ(とその偏導関数たち全て)も指数関数的に減衰する」ことを示した。証明のキーとなるのは「クライン・ゴールドン方程式と相性の良い微分作用素」及び「重み付き微分作用素の精密な解析」である。

(C)(論文) H. Sasaki, Remark on the scattering operator for the semi-relativistic Hartree equation, to appear in Adv. Stud. Pure Math.

(概要) 「遠方で多項式(の逆数)より速く減少する」相互作用ポテンシャル $V(x)$ による空間3次元の半相対論的ハートリー方程式の散乱作用素 S が、入力データの滑らかさと減衰の強さを維持することを証明した。特に、「入力データが急減少関数であるとき、それを散乱作用素で写した出力データも急減少関数になること」を証明した。証明のキーワードは「端点ストリッカー型評価」「非斉次ベゾフ空間を用いた不等式」「入力データと相互作用ポテンシャルに依存して定まる適切な関数空間」である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 H. Sasaki	4. 巻 -
2. 論文標題 Remark on the scattering operator for the two-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation with exponential nonlinearity	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyushu J. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 MAEDA Masaya, SASAKI Hironobu, SEGAWA Etsuo, SUZUKI Akito, SUZUKI Kanako	4. 巻 74
2. 論文標題 Dispersive estimates for quantum walks on 1D lattice	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 217,246
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/85218521	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hironobu Sasaki	4. 巻 268
2. 論文標題 The scattering problem for the three-dimensional cubic nonlinear Klein-Gordon equation with rapidly decreasing input data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 7774-7802
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2019.11.083	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki and K. Suzuki	4. 巻 38
2. 論文標題 Scattering and inverse scattering for nonlinear quantum walks	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 3687-3703
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2018159	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki and K. Suzuki	4. 巻 17
2. 論文標題 Weak limit theorem for a nonlinear quantum walk	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Quantum Inf Process	6. 最初と最後の頁 215
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11128-018-1981-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Sasaki	4. 巻 455
2. 論文標題 On the analytic smoothing effect for the Hartree equation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 1088--1109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2017.05.067	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Sasaki	4. 巻 B65
2. 論文標題 Remark on the analytic smoothing effect for the Hartree	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 91--107
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 佐々木 浩宣
2. 発表標題 The scattering problem for the three-dimensional cubic nonlinear Klein-Gordon equation with rapidly decreasing input data
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究活動

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~sasaki/J-re.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------