

令和 6 年 6 月 13 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05312

研究課題名(和文) 超臨界型非線形偏微分方程式の解の大域挙動

研究課題名(英文) Large time behavior of solutions to partial differential equations with supercritical nonlinearity

研究代表者

三浦 英之 (Miura, Hideyuki)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：20431497

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：非圧縮性Navier-Stokes方程式の初期値境界値問題および解の正則性の研究を行った。特に3次元半空間上のNavier-Stokes方程式の初期値境界値問題に対しエネルギーが無限大となる初期速度場に対して、時間大域的な弱解が存在することを示した。また解の正則性に関する研究として、初期速度場の規格化されたエネルギーがある近傍で十分小ければ、その弱解は少なくとも短時間は空間局所的に滑らかであることを示すことができた。また、重み付きの2乗可積分空間に属する初期値に対し、弱解が滑らかとなる領域について新しい評価を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非圧縮性Navier-Stokes方程式は流体力学の基礎方程式としての重要性から古くから多くの研究が行われている。しかし、方程式のもつ非局所性から生じる困難から、エネルギーが無限大となるような特異性をもつ速度場の研究は未解明の部分が多かった。本研究では非局所性を扱う上で鍵となる圧力の評価に関して新しい技術を導入することにより、弱解の時間大域的存在や局所正則性に関する成果を得ることができた。今回用いられた手法は非圧縮性粘性流体の数理解析における今後の研究においても有用になると期待できる。

研究成果の概要(英文)：We studied the initial-boundary value problem and regularity of the solutions to

the incompressible Navier-Stokes equations. In particular, it was shown that there exist global in time weak solutions for the initial-boundary problem for the Navier-Stokes equations in the three dimensional half space for initial data with infinite energy. As for regularity of the solutions, we showed that if a scaled energy of the initial velocity is sufficiently small in some neighborhood, the weak solution is locally smooth at least for a short time. Furthermore, we obtained new estimates on regions where the weak solutions are smooth for initial data in the weighted spaces of square integrable functions.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は流体力学に現れる基本的な非線形偏微分方程式であり、数学解析の観点からも古くから研究が行われている。しかし方程式に備わるエネルギーによる解の制御が困難なため、時間大域的正則性の問題等の多くの課題が残されている。近年、Jia Sverak (2014)等により、初期値（初期速度場）の局所的な正則性が解にどのように伝播するかという局所平滑化の研究の重要性が指摘されている。関係する先行研究として Caffarelli, Kohn, Nirenberg (1982), Tao (2013) 等があるが、スケーリングの観点から予想される最良の結果は得られていなかった。また適用可能な解のクラスや解析手法に違いがあった。

2. 研究の目的

本研究の目的は非圧縮性 Navier-Stokes 方程式等の非線形偏微分方程式に関して、解の局所平滑化の研究を行うことである。特にこれまで得られていた種々の結果を統一的な観点から理解し、また改良された評価を導出することを目標とする。これに関連して解に対する非局所的な影響を詳細に調べるために、正則性理論が適用可能な解のクラスを拡張し、エネルギーが有限とは限らない弱解の構成とその基本的な性質を研究する。

3. 研究の方法

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の局所平滑化を研究するためには非局所的な効果を伴う圧力項の取り扱いが鍵となる。しかし境界のある領域において精密な評価を行う際は特に多くの困難が生じる。まず半空間の場合に、エネルギーが有限とは限らない解についても収束するような圧力に対する積分公式を導出する。また解の局所解析のために blow up argument や線形 Stokes 方程式の評価等の手法を用いる。

4. 研究成果

(1) 3次元半空間における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題の可解性の研究を行った。この問題に関しては Lemarie-Rieusset (1999) が3次元全空間で定義された初期値問題に関して、エネルギーが無限大となる初期速度場に対しても、時間大域的弱解が構成できることを示している。同氏は一様局所型 L^2 空間を導入し、初期速度場がこの空間に属しているならば局所エネルギー不等式を満たす弱解が存在することを証明している。本研究では、この結果を参考に3次元半空間において時間大域的な弱解の構成を行った。証明では一様局所型空間における時間局所的な可解性および半空間における圧力の表現公式を用いた解析が鍵となる。応用として、解の爆発時刻付近でのスケール不変ノルムの発散についての結果を得た。これは Barker-Seregin による結果(2017)の別証明を与えている。本成果は前川泰則氏(京都大学)および Christophe Prange 氏(CY Cergy Paris 大学)との共同研究である (Communications in Mathematical Physics, (2019))。

(2) 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の弱解の局所平滑化の研究を行った。特にエネルギーが空間局所的に有限となる初期値が、ある空間近傍で高い正則性を持つ場合に、解がその近傍において滑らかであるかを考察し、初期値が局所的に3乗可積分であれば、suitable weak solution とよばれる弱解は、その空間近傍で短時間は滑らかになることを示した。同種の結果は Jia, Sverak (2014)により $p > 3$ となる p 乗可積分性をもつ初期値の場合に対して示されていたが、本

研究はこれを方程式のスケール臨界指数である $p=3$ の場合に拡張したものである．今回の結果の応用として，一様局所型 L^p 関数を初期値とする suitable weak solution の時間局所的な最大値評価を得ることができた．本成果は Kyungkeun Kang 氏(Yonsei 大学)および Tai-Peng Tsai 氏(British Columbia 大学)との共同研究である(International Mathematics Research Notices, (2020)).

(3) 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の局所平滑化の問題を(2)とは異なる新たな手法を導入して考察し，初期値の正則性について，より弱い条件下でも弱解は時空局所的には滑らかであることを示した．具体的には初期値の規格化された局所エネルギーが，ある空間近傍で十分小さければ，その近傍において suitable weak solution が短時間は滑らかであることを示した．規格化されたエネルギーは実解析学の分野等で古くから研究されている Morrey ノルムと密接な関係をもつ他，スケール不変性をもつ物理量としても自然な尺度である．応用として，重み付き L^2 空間に属する初期値に対して，局所エネルギー解とよばれる弱解が正則となる時空領域に関する評価を得ることができた．同種の評価は通常の L^2 空間については Leray(1934)により，また特定の重み付き空間に対しては Caffarelli, Kohn, Nirenberg(1982) および D'Ancona, Luca(2016)によって得られていたが，今回の研究では重みのクラスを従来の結果を含む形で一般化することができ，特に初期値の原点での特異性および無限遠での減衰と，解の正則性が保証される時空領域について新しい評価を導くことができた．また特異点の研究に関して，I型と呼ばれる条件を満たす特異点が存在したならば，その近傍において，規格化された局所エネルギーの集中が起こることを示した．このような特異点近傍における集中現象は非線形熱方程式や分散型方程式においては知られていたが，非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対しては新しい知見と思われる．また離散的自己相似解(discretely self-similar solution)とよばれる弱解の研究を行い，解を不変とするスケールが大きすぎない場合は，弱解は時間大域的に滑らかであることを示した．本成果は Kyungkeun Kang 氏(Yonsei 大学)および Tai-Peng Tsai 氏(British Columbia 大学)との共同研究である(Pure and Applied Analysis, (2021)).

(4) 3次元全空間で定義された非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の局所エネルギー解(local energy solution)の正則性に関する研究を行った．重み付き L^2 空間に属する初期値に対する弱解の正則性については，(3)の論文において考察しているが，今回は冪の指数に関する制約を外すことに成功し，初期値の原点での正則性が高いほど，局所エネルギー解が滑らかになる領域の評価が改良できることを示した．今回用いた手法を応用することで，局所的に p 乗可積分(p は3以上)となる初期値に対する局所エネルギー解の一様ノルムの時間正則化レートについて評価を得ることができる．これは先行研究の Jia, Sverak(2014)や Barker-Prange(2021)で得られていた評価をある意味で改良するものとなっている．以上の結果の証明では初期値の正則性に適合するスケール変換に関して自然な局所エネルギーを導入し，その時間発展の評価を行うことが鍵となる．本成果は Kyungkeun Kang 氏(Yonsei 大学)および Tai-Peng Tsai 氏(British Columbia 大学)との共同研究である(Partial Differential Equations and Applications, (2021)).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 8件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kang Kyungkeun, Miura Hideyuki, Tsai Tai-Peng	4. 巻 3
2. 論文標題 Regular sets and an epsilon-regularity theorem in terms of initial data for the Navier-Stokes equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 567 ~ 594
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/paa.2021.3.567	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kang Kyungkeun, Miura Hideyuki, Tsai Tai-Peng	4. 巻 3
2. 論文標題 Local regularity conditions on initial data for local energy solutions of the Navier-Stokes equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-021-00127-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Maekawa Yasunori, Miura Hideyuki, Prange Christophe	4. 巻 13
2. 論文標題 Estimates for the Navier-Stokes equations in the half-space for nonlocalized data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Analysis & PDE	6. 最初と最後の頁 945 ~ 1010
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/apde.2020.13.945	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Maekawa Yasunori, Miura Hideyuki, Prange Christophe	4. 巻 367
2. 論文標題 Local energy weak solutions for the Navier-Stokes equations in the half-space.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 517-580
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03344-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Maekawa Yasunori, Miura Hideyuki, Prange Christophe	4. 巻 21
2. 論文標題 On stability of blow-up solutions of the Burgers vortex type for the Navier-Stokes equations with a linear strain	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00021-019-0450-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Germain Pierre, Ghoul Tej-Eddine, Miura Hideyuki	4. 巻 70
2. 論文標題 On Uniqueness for the Harmonic Map Heat Flow in Supercritical Dimensions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 2247 ~ 2299
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/cpa.21716	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kang Kyungkeun, Miura Hideyuki, Tsai Tai-Peng	4. 巻 323
2. 論文標題 Green tensor of the Stokes system and asymptotics of stationary Navier-Stokes flows in the half space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 326 ~ 366
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2017.10.031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Maekawa Yasunori, Miura Hideyuki	4. 巻 50
2. 論文標題 On Isomorphism for the Space of Solenoidal Vector Fields and Its Application to the Incompressible Flows	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 339 ~ 353
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/16M1093537	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kang Kyungkeun, Miura Hideyuki, Tsai Tai-Peng	4. 巻 2021
2. 論文標題 Short Time Regularity of Navier-Stokes Flows with Locally L^3 Initial Data and Applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 8763 ~ 8805
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnz327	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Local regularity conditions on initial data for local energy solutions of the Navier-Stokes equations
3. 学会等名 2023 Winter Workshop on Mathematical Analysis of Fluids (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Estimates of the regular set for Navier-Stokes flows in terms of initial data
3. 学会等名 Vorticity, Rotation and Symmetry (V) - Global Results and Nonlocal Phenomena (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Estimates of the regular set for Navier-Stokes flows in terms of initial data
3. 学会等名 非圧縮性粘性流体の数理解析 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Local energy weak solution for the Navier-Stokes equations and applications
3. 学会等名 RIMS Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Short time regularity of Navier-Stokes flows with locally L^3 initial data and applications
3. 学会等名 7th China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Local energy weak solutions for the Navier-Stokes equations in the half-space.
3. 学会等名 International Conference on PDEs from Fluids (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Local energy weak solutions for the Navier-Stokes equations in the half-space.
3. 学会等名 Maximal regularity and nonlinear PDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 On uniqueness for the supercritical harmonic map heat flow
3. 学会等名 第42回偏微分方程式論札幌シンポジウム（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Miura Hideyuki
2. 発表標題 Local energy weak solutions for the Navier-Stokes equations in the half-space
3. 学会等名 第10回 名古屋微分方程式研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Mathematical Fluid Mechanics and Related Topics	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 East Asian Workshop on PDEs from Kinetics and Continuum Mechanics	開催年 2023年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------