

令和 6 年 6 月 27 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05316

研究課題名（和文）非線形分散型方程式の代数的構造と初期値問題の適切性

研究課題名（英文）Well-posedness of the Cauchy problem for nonlinear dispersive equations and its algebraic structure

研究代表者

津川 光太郎 (Tsugawa, Kotaro)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：70402451

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：1. 5階のKdV型方程式の初期値問題について考え、指数が1以上のソボレフ空間における無条件一意性を含む時間局所適切性を示した。指数が1未満の場合には非線形項が時空間超関数の意味でさえ定義不可能であるためこの結果は最良のものである。
2. ある種の高階のシュレディンガー型方程式の初期値問題を考え、エネルギー不等式を用いることによりL2適切性や放物型平滑化効果やpersistenceの破壊が起きることを示し、解の滑らかさの性質にもとづいて方程式を3種類に分類することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形分散型方程式の研究はここ30年ほど大きく進展しているが、これまで主に扱われてきたのは非線形の特異性がそれほど強くない場合であり、非線形項に高階の微分を含むような方程式に対する結果は限られていた。本研究はこのようなこれまで扱いにくかった方程式に対する研究手法を切り開いたという意味で学術的意義が高いといえる。

研究成果の概要（英文）：1. We consider the fifth order KdV type equations and prove the unconditional well-posedness in the Sobolev space when its index is greater than or equal to 1. It is optimal in the sense that the nonlinear terms can not be defined in the space-time distribution framework when the index is less than 1. The main idea is to employ the normal form reduction and a kind of cancellation properties to deal with the derivative losses.
2. We consider the Cauchy problem of a class of higher order Schrodinger type equations with constant coefficients. By employing the energy inequality, we show the L2 well-posedness, the parabolic smoothing and a breakdown of the persistence of regularity. We classify this class of equations into three types on the basis of their smoothing property.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：分散型方程式 非線形 初期値問題 適切性 KdV方程式 シュレディンガー方程式 調和解析

1. 研究開始当初の背景

非線形分散型方程式の初期値問題の適切性（解の一意存在と初期値に対する解の連続依存性）および時間大域的な解の振る舞いの研究はこの30年間で大きく発展してきた。初期において用いられた手法は線形方程式の研究に用いられた道具を非線形方程式に応用したものに過ぎなかった。しかし、より精密な結果を得るためには線形化方程式の解の性質と非線形項の持つ構造を同時に上手く利用出来るような手法が必要であることが分かり、近年は Bourgain による Fourier 制限ノルムや Shatah の normal form reduction などの応用による非線形方程式に特化した手法が活躍している。これらの手法は、非線形項における自己相互作用を、より精密に評価することを可能にし、方程式の持つ対象性などの幾何的性質を有効に活用することを可能にした。これらの研究を通して、解の滑らかさや長時間挙動における減衰を悪くする原因として共鳴現象があることが分かってきた。また、非線形の特異性がそれほど強くない方程式に対しては多くの成果が得られてきたが、高階の微分を含むような強い特異性を持つ非線形方程式に対しては未解決な部分が多く残されており、このような方程式に対して有効な方法として短時間 Fourier 制限ノルムや修正エネルギー法などの新しい手法が現在発展中である。

2. 研究の目的

非線形分散型方程式の初期値問題の適切性（解の一意存在と初期値に対する解の連続依存性）および時間大域的な解の振る舞いについて研究する。これらの研究においては、線形化方程式の特徴を上手く利用し非線形項における相互作用を精密に評価することが重要となっている。近年、解の滑らかさや時間減衰を悪くする要因の一つが非線形相互作用における共鳴現象であることが分かって来た。また、非線形分散型方程式の中には可積分系として知られている KdV 方程式や非線形 Schrodinger 方程式のように高い対象性を持つ方程式がある。

可積分系にあらわれる高階の KdV 方程式や高階の非線形 Schrodinger 方程式は非線形項が強い特異性を持つにも関わらず、その解は「良い」性質を持つことが分かっている。これは可積分系が強い対称性を持つからである。本研究では、方程式の持つ対称性に着目し、共鳴現象を解析することによりこれまで用いられてきた手法を発展させること、および、初期値問題の適切性の観点から、方程式の対称性と解の特異性の関連を明らかにすることである。

3. 研究の方法

非線形分散型方程式の初期値問題の適切性の証明では主にエネルギー法か縮小写像の原理に基づく方法が用いられる。本研究においてもこれらの手法を用いるが、この際に困難となる部分是非線形項の評価である。特に本研究のように高階の微分を含み特異性が強い場合にはこの影響をいかにして取り除くかが問題となる。本研究では normal form reduction を用いて式を展開し、相殺効果を起こしたり、平滑化効果を引き出したりする点が本研究の手法として独創的な部分である。

4. 研究成果

- (1) 空間1次元トーラス上の5階の KdV 型方程式の初期値問題を考え、指数1以上のソボレフ空間において無条件一意性を含む時間局所適切性が成り立つことを示した。この方程式に対して無条件一意性が成り立つのは指数1が限界であるから、これは最良の結果である。normal form reduction を行い高次に展開した際にある種の相殺効果が起きることを利用している点が既存の結果にはない新しいアイデアであり、この手法は他の高階の微分を含む方程式に対しても応用可能であると思われる。また、可積分構造を持つ5階の KdV 方程式に対してはその対称性を利用して多くの結果があるが、本研究では可積分構造を持たない方程式を含んでいる点が特徴である。本研究は佐賀大学の加藤孝盛氏との共同研究である。
- (2) 空間1次元トーラス上の定数係数で高階微分を含むシュレディンガー型方程式の初期値問題を考え、その解の持つ性質から上記の方程式は3種類に分類されることを示した。1つ目は通常分散型方程式が持つ典型的な性質である正と負の時間の方向に解くことが出来て解の滑らかさは初期値関数と同じ滑らかさと同じになる場合である。2つ目は通常放物型方程式が持つ典型的な性質である正または負のどちらか一方の時間方向のみに解くことが出来て解の滑らかさは初期値関数より滑らかになるという平滑化効果を持つ場合である。3つ目は楕円型方程式が持つ性質である正と負の両方の時間方向に対して初期値と同じ滑らかさを持つ解が存在しない場合である。考える方程式の主要部は全て分散型であるのにも関わらずこのような異なる性質を持つのが興味深い点である。証明の主要部はエネルギー法で

あるため、この研究はさらに変数係数の場合に拡張され、さらに非線形の場合にも拡張可能である点も意義深い。本研究は同志社大学の田中智之氏との共同研究である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kato Takamori, Tsugawa Kotaro	4. 巻 5
2. 論文標題 Cancellation properties and unconditional well-posedness for the fifth order KdV type equations with periodic boundary condition	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1-55
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-024-00289-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Tanaka, K. Tsugawa	4. 巻 59
2. 論文標題 Well-posedness and parabolic smoothing effect for higher order Schrodinger type equations with constant coefficients	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 465-480
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 I. Kato and K. Tsugawa	4. 巻 30
2. 論文標題 Scattering and well-posedness for the Zakharov system at a critical space in four and more spatial dimensions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Differential and Integral equations	6. 最初と最後の頁 763-794
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 6件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 K. Tsugawa
2. 発表標題 Local well-posedness of derivative Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 French-Japanese one meeting in Tours（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kotaro TSUGAWA
2. 発表標題 Local well-posedness of derivative Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 French-Japanese one meeting in Tours (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 K. Tsugawa
2. 発表標題 Well-posedness and parabolic smoothing effect for higher order Schrodinger type equations with constant coefficients
3. 学会等名 Mathematical Analysis of Nonlinear Dispersive and Wave Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kotaro TSUGAWA
2. 発表標題 Well-posedness and parabolic smoothing effect for higher order Schrodinger type equations with constant coefficients
3. 学会等名 第169回神楽坂解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kotaro TSUGAWA
2. 発表標題 Well-posedness and parabolic smoothing effect for higher order linear Schrodinger type equations on the torus
3. 学会等名 第37回九州における偏微分方程式研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kotaro TSUGAWA
2. 発表標題 Local well-posedness and parabolic smoothing effect for higher order linear Schrodinger type equations on the torus
3. 学会等名 Okayama Workshop on PDEs (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 津川光太郎
2. 発表標題 Ill-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 東北大学応用数学セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 津川光太郎
2. 発表標題 Ill-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 応用解析研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 津川光太郎
2. 発表標題 Ill-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 調和解析中大セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 津川光太郎
2. 発表標題 III-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 中大偏微分方程式セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kotaro Tsugawa
2. 発表標題 III-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 名古屋微分方程式研究集会 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kotaro Tsugawa
2. 発表標題 III-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 津田塾大学PDE研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kotaro Tsugawa
2. 発表標題 III-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 第2回 PDE Workshop in Miyazaki
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kotaro Tsugawa
2. 発表標題 Ill-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 第7回弘前非線形方程式研究会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kotaro Tsugawa
2. 発表標題 Ill-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kotaro Tsugawa
2. 発表標題 Ill-posedness of derivative nonlinear Schrodinger equations on the torus
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------