

令和 4 年 5 月 10 日現在

機関番号：14401
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2017～2021
課題番号：17K05324
研究課題名(和文) 横断的狭義双曲系

研究課題名(英文) Transversally strictly hyperbolic systems

研究代表者
西谷 達雄 (Nishitani, Tatsuo)

大阪大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号：80127117
交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：一階の微分方程式系の特性多様体の特異点集合 S が滑らかな多様体であり、かつ主表象の固有値がすべて実で半単純のとき、 S に横断的な方向に狭義双曲系となる系を横断的狭義双曲系と名付け、横断的狭義双曲系に対する初期値問題を研究した。横断的狭義双曲系はその超局所伝播錐が S と整合的ならば強双曲系であることを証明した。一方、系が横断的狭義双曲系でも、その超局所伝播錐が S と整合的でないときには複雑な現象が起こることを興味深い例を用いて示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では微分方程式系を研究し、系の r 次特異点で主シンボルが対角化可能のとき、局所化系が接束の接空間を r 次特性多様体の接空間で割った商空間上の系として自然に定義され、局所化系が狭義双曲系で、 r 次特性多様体が包摂的あるいはシンプレクティック多様体のときには強双曲系になることを示した。局所化系を通じて、強双曲型方程式と強双曲系の違いを明らかにする結果であり、強双曲系の研究を進めるうえで一つの指標になると考えられる。

研究成果の概要(英文)：We have studied the Cauchy problem for first-order systems. Assuming that the set S of singular points of the characteristic variety is a smooth manifold and the characteristic values are real and semisimple, we have introduced transversally strictly hyperbolic systems as systems which are strictly hyperbolic in the directions transverse to S . If the microlocal propagation cone and S are compatible, we have proved that transversally strictly hyperbolic systems are strongly hyperbolic. On the other hand, if the microlocal propagation cone is incompatible with S , we have shown that transversally strictly hyperbolic systems are much more involved, using an interesting example.

研究分野：数物系科学

キーワード：局所化系 横断的狭義双曲系 強双曲系 超局所伝播錐 包摂的 シンプレクティック

1. 研究開始当初の背景

単独微分作用素の主シンボル p は双曲型多項式, すなわち特性根はすべて実であるとする. この p の r 次特性点 (特性根が r 重に重複する点) において p のこの点の周りでの Taylor 展開の最初の非自明な項を p の局所化と呼ぶ. この局所化は接束の接空間上の r 次斉次多項式であり, r 次特性多様体 (r 次特性点全体の集合) の接空間方向には依存せず, 従って接束の接空間を r 次特性多様体の接空間で割った商空間上の多項式とみなせる. この局所化はこの商空間上で再び双曲型多項式である. この局所化が商空間上で狭義双曲型多項式である場合の p に対する初期値問題については既に申請者によるいくつかの結果がある. しかしながら Ivrii-Petkov の結果から従うように, 単独微分作用素に対しては r が 3 以上ならば局所化が商空間上で狭義双曲型であっても初期値問題が滑らかな関数空間で適切となるためには低階に条件が必要であり強双曲型, すなわち低階にかかわらず初期値問題が滑らかな関数空間で適切, とはなり得ない. 微分方程式系 L については多重特性点 (系の主シンボルの固有値が重複する点) で系の主シンボルが各点ごとに対角化可能のとき, 系のこの特性点における局所化系が定数係数の系の場合は J. Vaillant, また変数係数の系の場合は申請者によって上記商空間上の系として定義されその性質についての考察もなされた. ただしこの研究の方向は, 局所化系の係数行列の生成する線形空間の次元が十分に大きいと元の系が滑らかに対称化できる, という方向の研究であった. 申請者と G. Metivier は 2016 年の Gevrey クラスでの初期値問題の協同研究中に, 局所化系と狭義双曲性を組み合わせると単独方程式の場合とは異なった新しい展開が期待できるのではないか, というアイデアを得た.

2. 研究の目的

このアイデアに基づいて, 申請者と G. Metivier は多重特性点が滑らかな多様体であり, 多重特性点では系の主シンボルが各点ごとに対角化可能である場合の考察を始め, この局所化された系が狭義双曲系, すなわち商空間上の系として主シンボルの固有値が実で相異なるとき, この系を「横断的狭義双曲系」と呼ぶことにした. 本研究では, 横断的狭義双曲系の初期値問題の適切性, とくに強双曲性について研究することを目的とした. 局所化系のシンボルは固有値がすべて実, という意味で双曲型行列でありその行列式は双曲型多項式である. 従って接束上の双曲型多項式としてその超局所双曲錐が定義され, この超局所双曲錐の接束上の標準シンプレクティック形式に関する双対錐として局所化系の超局所伝播錐が定義される. 超局所伝播錐は錐の頂点を通過するすべての陪特性帯を含む最小の錐でもある. この超局所伝播錐と特性多様体については, 局所化系の超局所伝播錐が多重特性多様体の接空間に含まれることと多重特性多様体が包摂的であることは同値である. そこでこの事実をふまえ横断的狭義双曲系の局所化系の超局所伝播錐と特性多様体の接空間との位置関係を勘案し, 次の 3 つの課題を研究し解決することを目標にした.

- (1) 横断的狭義双曲系の局所化系の超局所伝播錐と多重特性多様体の接空間が自明的に交わる場合, この横断的狭義双曲系は強双曲系であろう (ただし L^2 適切ではなく解は regularity loss を起こすであろう) と予想し, この予想を証明することを目標とする.
- (2) G. Metivier は 3×3 の多項式係数の一様対角化可能ではあるが初期値問題が滑らかな関数空間で適切でない例を構成している. この例は横断的狭義双曲系でありその局所化系の超局所伝播錐は多重特性多様体の接空間と非自明的に交わる. そこでこの例をプロトタイプとして詳細に解析する. さらに最も単純な場合としてこの交わりが一次元半直線の場合に系の標準形を求めるを試みる.
- (3) 横断的狭義双曲系の定義において局所化系が商空間上で狭義双曲系であることを要請するが, この要請の妥当性を検討する. すなわち系が強双曲系であるためには局所化系がどのような条件を満たす必要があるかを研究する. 特に超局所伝播錐が多重特性多様体の接空間に含まれる場合は上記のように多重特性多様体は包摂的多様体であり, 定数係数の系に近いと考えられるので, この場合は強双曲系であるためには局所化系が商空間上の系として各点ごとに対角化可能などの何らかの更なる条件を満たすことが必要と予想される. これらの点を明らかにすることを目指す.

3. 研究の方法

多重特性多様体が包摂的なときは, まず Fourier 積分作用素を作用させ, 多重特性多様体が基本座標系の零点であらわされるように変換する. このとき系のシンボルは基本座標の一次式であり基本座標で表される symmetrizer が存在する. ただしこの symmetrizer は狭義双曲系のととは異なり, 通常シンボルではない. そこで多重特性多様体の方向とそれ以外の方向で異なる非斉次な距離と, この距離に対応した擬微分作用素の Wyle Calculus を準備してこの Calculus を利用してエネルギー不等式を導く. 系の主シンボルは多重特性多様体以外の方向には 0 次であり, symmetrizer は本質的に多重特性多様体を表す基本座標にしかよらないので,

この Wyle Calculus を利用すると古典的な symmetrizer の場合とほぼ同様のことが成立する .

多重特性多様体がシンプレクティックのときはまったく別の方法が必要とされる . このことは解が regularity loss を起こすことから必然的に予想されることである . 系を $m \times m$ 系とし m 次多重特性多様体がシンプレクティックとする . 系の主シンボルの余因子行列をシンボルとする $m-1$ 次の系を右から作用させる . 結果は系の行列式が対角線上に並んだ , 対角行列を主部とする m 次の系である . このときシンボルの $m-j$ 次部分は m 次多重特性多様体上 $m-2j$ 次で 0 になる . また系の行列式はある狭義双曲型多項式 q (ただし係数はすべての変数に依存する) と多重特性多様体の定義関数の合成として得られる . この q の $c>0$ をパラメーターとする N_{ij} 近似を Q とすると Q は多重特性多様体の定義関数と c の多項式で (係数はすべての変数に依存する) 定義関数と c の多項式として狭義双曲型多項式となる . この操作は多重特性多様体の blow up に対応する . c として N_{ij} 近似部分が $m-1$ 次となるような weight を選び , このような Q をシンボルとして扱えるような metric を定める . この metric は多重特性多様体の方向と他の方向で非同次となっている . さらにこの metric に対応する Wyle Calculus を構築する . この metric のもとでは Q は狭義双曲型多項式として振る舞うので , 対応する Wyle Calculus を適用することで , シンボルの $m-j$ 次部分は m 次多重特性多様体上 $m-2j$ 次で 0 になることを勘案すると従来のエネルギー法が適用可能である .

4 . 研究成果

一階微分方程式系の重複固有値がすべて半単純とすると系の多重特性多様体上で局所化が定義される . この局所化系が多重特性多様体の接空間による商空間で狭義双曲系となると , これを横断的狭義双曲系と呼ぶ . G.Metivier と共同で , 多重特性多様体が包摂的である横断的狭義双曲系は強双曲系 , すなわちすべての低階に対して初期値問題が滑らかな函数空間で適切となること , さらに L^2 適切であることを証明した . この結果は共著論文として Kyoto Journal Math. (2018) に掲載された . またこの結果の一部は 2017 年 12 月にイタリアのピサで開催された F.Colombini の 70 歳記念国際研究集会「Simposio di Analisi Matematica in occasione dei 70 anni de Ferruccio Colombini」で発表した . さらに多重特性多様体がシンプレクティックのときにも横断的狭義双曲系は強双曲系となることの証明にも成功した . 多重特性多様体がシンプレクティックならば局所化系の超局所伝播錐は多重特性多様体と自明に交わることが示せるので「多重特性多様体と超局所伝播錐が自明に交わる横断的狭義双曲系は強双曲系であろう」という予想の一部を肯定的に証明することに成功した .

多重特性多様体が包摂的である場合にはエネルギー不等式を導くために symmetrizer の方法を適用したがその研究過程で , 双曲型多項式 q の根が双曲型多項式 p の根を分離するときには , p と q の Bezout 行列が p の Sylvester 行列の symmetrizer になる , という著しい性質を発見した . さらに p と p の導関数の Bezout 行列は S.Spagnolo の導入した quasi-symmetrizer になることもわかった . これらの事実は今後の研究に役立つと思われるので結果を論文として Bollettino dell ' Unione Matematica Italiana (2020) に発表した .

G.Metivier は実パラメーター a を含む 3×3 系の一階微分方程式系 L に対して $a=0$ のときは系は対称双曲系であり , したがって強双曲系であり , $a=1$ のとき , 系は一様対角化可能 , すなわち T の逆を S とするとき SLT が対称行列となる T で $|T|$ および $|S|$ が一様に有界なものが存在する , にもかかわらず初期値問題が無限階微分可能な函数のクラスで適切とならない例を提出している . この例に対して , パラメーター a を複素数にまで拡張して考察し , ia (ただし i は虚数単位) が複素平面上 , 実の区間 $[-1, 1]$ に属さなければこの系に対する初期値問題は無限階微分可能な函数のクラスで適切とはならないこと , さらに詳しく $s>2$ なる s に対して初期値問題は s 次 Gevrey クラスで非適切 , さらに局所可解でないことも示した . 一方で ia が実区間 $(-1, 1)$ に属すときは初期値問題は L^2 で適切であり 特に強双曲系であることを示した . また ia が境界点の 1 または -1 のときは初期値問題は H^1 適切となることを示した . 横断的狭義双曲系は常に一様対角化可能系であるので , この結果は一様対角化可能な系は Gevrey クラス $1<s<2$ で低階にかかわらず適切である , という梶谷の結果が一般にはこれ以上改良されないことを示す例を与えたことにもなっている . この例において , 係数に現れる変数を t, x, y , と変えることによって , t のときは超局所伝播錐が多重特性多様体と自明に交わる強双曲系であり (ただし解の滑らかさは初期値の滑らかさに比して一般に悪くなる) , y のときは多重特性多様体が包摂的で , 初期値問題は L^2 適切となり , 特に強双曲系である . さらに x のときはそのいずれでもなく , 上記に述べた例になることを示した . 結果の一部は 2018 年 9 月にはイタリアの Cortona で開催された国際研究集会「Linear and Nonlinear Wave Phenomena」で発表した . さらにこれらの結果は論文として Kyoto Journal Math. (2020) に掲載された .

多重特性多様体がシンプレクティックなときには横断的狭義双曲系は強双曲系であることは示せたので , さらにこの結果を推し進め「多重特性多様体と超局所伝播錐が自明に交わる横断的狭義双曲系は強双曲系である」という予想を示すために , 時刻一定曲面を保存する Fourier

積分作用素のみで，多重特性多様体がシンプレクティックの場合に展開した方法を適用できる作用素に変換できる場合を決定した．これが多重特性多様体がシンプレクティックの場合を含む，真により大きなクラスであることも確かめた．また，多重特性多様体と超局所伝播錐が自明に交わる場合は，座標変換のみを用いて2つの基本的な場合に分類できることを示し，それぞれの場合に応じて異なる種類のパラメーター付き局所化を導入した．このパラメーター付き局所化シンボルをシンボルとする擬微分作用素の Wyle Calculus を準備し，この Wyle Calculus を利用してエネルギー評価式を導出することを試みた．この方法によって一定の進歩はあったが残念ながら完全な解決には至らなかった．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Colombini Ferruccio, Nishitani Tatsuo	4. 巻 17
2. 論文標題 On the Cauchy problem for $D_t^2 - D_x(b(t)a(x))D_x$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Hyperbolic Differential Equations	6. 最初と最後の頁 75-122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nishitani Tatsuo, Petkov Vesselin	4. 巻 57
2. 論文標題 Cauchy problem for hyperbolic operators with triple effective characteristics on the initial plane	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 597-615
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Nishitani Tatsuo	4. 巻 60
2. 論文標題 Transversally strictly hyperbolic systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1399-1418
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nishitani Tatsuo	4. 巻 13
2. 論文標題 Notes on symmetrization by Bezoutian	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bollettino dell'Unione Matematica Italiana	6. 最初と最後の頁 417-428
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nishitani Tatsuo, Petkov Vesselin	4. 巻 123
2. 論文標題 Cauchy problem for effectively hyperbolic operators with triple characteristics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 201 ~ 228
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2018.06.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Colombini Ferruccio, Nishitani Tatsuo, Rauch Jeffrey	4. 巻 XIX
2. 論文標題 Weakly hyperbolic systems by symmetrization	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ann. Sci. Norm. Super. Pisa	6. 最初と最後の頁 217 ~ 251
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.201610_006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nishitani Tatsuo	4. 巻 54
2. 論文標題 On the Cauchy Problem for Differential Operators with Double Characteristics, A Transition from Non-effective to Effective Characteristics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 317 ~ 349
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/54-2-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Metivier Guy, Nishitani Tatsuo	4. 巻 58
2. 論文標題 Note on strongly hyperbolic systems with involutive characteristics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 569 ~ 582
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2017-0029	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nishitani Tatsuo	4. 巻 31
2. 論文標題 The Cauchy problem for differential operators with double characteristics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 169 ~ 197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/suga/433	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Nishitani	4. 巻 54
2. 論文標題 On the Gevrey strong hyperbolicity	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 383-408
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 T.Nishitani	4. 巻 54
2. 論文標題 On the Cauchy problem for differential operators with double characteristics, A transition from non-effective to effective characteristics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Publ. RIMS Kyoto Univ.	6. 最初と最後の頁 317-349
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計2件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Nishitani Tatsuo
2. 発表標題 Transversally strictly hyperbolic systems
3. 学会等名 Linear and Nonlinear Wave Phenomena (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T.Nishitani
2. 発表標題 On the Cauchy problem for $D_t^2 - b(t)D_x(x)D_x$
3. 学会等名 Simposio di Analisi Matematica in occasione dei 70 anni de Ferruccio Colombini (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 T.Nishitani	4. 発行年 2017年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 211
3. 書名 Cauchy problem for differential operators with double characteristics	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------