2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ０５３２９
研究課題名（和文）偏微分方程式のボレル総和法理論の構成とストークス幾何の解明

研究課題名（英文）Construction of Borel summability theory for partial differential equation and investigation of Stokes geometry

研究代表者
吉野　正史（Masafumi, Yoshino）

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：００１４５６５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的はハミルトン系の解の大域的性質をボレル総和法の視点から明らかにすることである。最初に解析的な準備として、偏微分方程式に対するボレル総和法の理論を大域的に拡張したのち、数理物理の偏微分方程式の解の爆発現象やハミルトン系の動く特異点の研究を行った。主な結果は、ボレル総和法を偏微分方程式に大域的に拡張したことおよび考えるハミルトン系に対する一般化されたバーコフ変換から標準的なハミルトン系を構成でき、これの動く特異点の表示から、もとのハミルトン系の動く特異点の構造が決まることを証明したことである。これは当該分野で新しい研究手法を与えると期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義
自然現象は微分方程式を用いて記述されることが多い。当該研究では、数理物理の方程式達で記述される現象が、大きく変化する爆発現象やそれが起こる点すなわち特異点での現象を解析する際の新しい手法を提案する。その方法はハミルトン系に対するバーコフ変換理論の一般化に対応し、考える方程式をある標準的な特異性の構造がわかる形に変換して、それから逆変換を用いて特異性の構造を知るというものである。このため、ボレル総和法という数学の道具を大域的に拡張して用いる。この方法は数理物理でよく知られた発散の繰り込みという考え方に対応する。

研究成果の概要（英文）：The object of the research is to study the global property of solutions of a Hamiltonian system from the viewpoint of Borel summability. As an analytical tool, we first extend the theory of Borel summability to partial differential equations globally. Then we study the blowup phenomenon of a solution of an equation of mathematical physics and a movable singular point of a Hamiltonian system.
The main results of the research are as follows: we extend the theory of Borel summability to a partial differential equation globally. One can find a standard Hamiltonian system by an generalized Birkhoff transformation and obtains the structure of movable singular points via the expression of movable singularity of the transformed Hamiltonian system. We expect that this approach yields a new method in the field.

研究分野：微分方程式と力学系

キーワード：ボレル総和法　ハミルトン系　可積分性　モノドロミー　バーコフ変換　半線形波動方程式　動く特異点　blowup

１．研究開始当初の背景

（１）古典的漸近解析理論から偏微分方程式のボレル総和可能性へ。不確定特異点を持つ常微分方程式に対する発散級数解の構成とそれの真の解としての特徴づけは古典的漸近解析理論として基本的である。この理論は Balser、 Braaksma、 Ramis、Sibuya 等により総和可能性の理論として拡張された。そこではボレル総和法が基本的手法である。これらは Balser, Costin, Ecalle 等により非線形方程式の超級数（transseries）に拡張された。偏微分方程式への拡張に関しては、真島氏による多変数化、田原氏によるフックス型偏微分方程式、Balser, 三宅氏らによる熱方程式、Michalik による nonKowalevskian 方程式への拡張, Stolovitch, Braaksma によるベクトル場の標準形理論への応用、Schafke、Mozo らによる monomial summability の研究がある。他方、偏微分方程式の総和法理論は量子化とも関係し、まだ未解明の部分が大きい。

（２）パラメトリックボレル総和可能性。 量子力学の発展とともにシュレディンガー方程式に対する WKB 解析が重要になり、それは Ecalle の仕事を経由して、WKB 解析で接続情報を得る完全 WKB 解析の進展につながった。その基礎としてパラメトリックボレル総和可能性の理論が整備された。(河合ー竹井)。これは特異摂動パラメータに関する発散解の総和法である。常微分方程式系に対する古典的結果として、Balser - Kostov, Balser - Mozo の研究、真島(1980)の研究も深いつながりを持つ。

（３）ボレル総和法をもとにした大域解析と接続問題について。トンネル効果などの量子力学的現象を理解するときには接続情報が重要であるが、完全 WKB 解析により、Stokes 幾何の構造でボレル変換像の特異性の大域構造が記述できることが明らかになりつつある。これらは resurgent 解析といわれるが、パンルベ方程式の研究とも深いつながりを持ち、最近では string theory, 場の理論とも関係し、さらに世界的に注目を集めている。偏微分方程式に対する総和法においても、大域解析は非線形方程式の解の爆発とその接続の研究に有効であることが予想されていた。ボレル総和法の理論をより深めストークス幾何などの大域解析理論との関係を調べ、爆発現象等を理解するというのは自然に期待される研究であった。

２．研究の目的

（１）ポアンカレ条件を仮定しないボレル総和法。申請者の H26〜H28 の基盤研究(C)ではポアンカレ条件を仮定してパラメトリックボレル総和可能性を示したが、ハミルトン系への応用を考えるとポアンカレ条件が成立しない場合に理論を構成することが重要であるのでこれを実行する。さらに、偏微分作用素のパラメトリックボレル総和可能性に関しては、上述の申請者の研究の成果を基にして、Stokes 図形とボレル総和法による解の大域的性質を明らかにする。特に変わり点の存在が非線形固有値問題や解の挙動にどのような影響を及ぼすのかという点に注目して研究を実行する。

（２）爆発現象の大域解析。ボレル和の大域解析いわゆる resurgency は、接続問題の研究ではすでに取り扱われているが、非線形波動方程式の解の爆発現象で、特に解の profile の爆発後の接続を大域的に研究する。より正確に、球対称自己相似解の満たす profile 方程式において、不確定特異点で解をボレル総和法で構成し、その resurgency を調べるということを重点的に実行する。バーコフ変換の理論あるいはリーマンヒルベルト分解などを用いることにより、接続情報を楕円関数などの特殊関数を用いたより解析可能な関数を用いて表示する。これにより、爆発解の profile の接続などの情報を求める。この議論はいわゆる動く特異点の研究にも応用可能であると期待される。

（３）偏微分方程式のボレル総和可能性とストークス幾何。１階の非線形方程式系について総和法理論を構成する。これはベクトル場の標準形の問題への応用が見込めるほか、すでに申請者がパラメトリックボレル総和可能性で開発した方法が生かせる。他方、多変数の漸近解析が関係するので、局所理論であっても特有の困難さも予想される。このため、monomial summability 等の最新の結果をもちいて、真島氏の研究も踏まえながら研究を進める。さらに、漸近解析では基本的な概念であるストークス図形の概念を偏微分方程式に導入して大域解析を実行する。

（４）モーメント ボレル総和法と middle convolution 理論の関係の解明。このテーマは申請者の H26〜H28 の基盤研究(C)の結果をさらに発展させ、より本質的な理解を目的とする。すでに最近の研究によって middle convolution、表現論、接続問題のつながりなど新しい事実が明らかになっており、これらの進展もふまえて研究に取り組む。その他の具体的な応用、たとえば数理物理あるいは生態モデルへのボレル総和法の応用等も同時に実行する。

３．研究の方法

（１）全体としての基本方針。研究は国内外の研究者との研究連絡や国際会議、研究集会やセミナーの参加等をもとにした情報収集や討論を用いながら、理論構成や成果の取りまとめ、国

内外での研究集会を行う。国際会議での発表は研究代表者が行う。研究期間の前半は偏微分方程式のボレル総和法の基礎理論の拡張およびボレル総和法の数理モデルへの適用や爆発現象への応用を実行する。研究期間後半においては、力学系の手法等を用いたボレル総和法理論の拡張あるいはストークス幾何を用いた大域解析を実行する。研究は申請者が単独で行うが、国内の研究グループとの情報交換あるいは海外の研究者との国際会議での研究交流、国際会議での講演や外国の研究者の招へいは積極的に実施する。若手と中堅の研究者との協力等に関しては、ボレル総和法や力学系の研究者を広島大学でのセミナー、研究集会に招聘して研究討論を実行するほか、個別テーマごとに必要に応じて招聘を行い、研究協力を実施する。また、定期的に研究集会を開催して、研究成果の発表、問題の共有などを進める。さらに生態学等の具体的な問題へのボレル総和法の応用なども実行する。以下では重要なテーマについて方法を述べる。

（２）偏微分方程式に対するボレル総和法理論について。このテーマは申請者が単独で実施するが、国内外の研究者との情報交換や連携を予定している。都立大学の理論物理グループは研究動機に関連があるので、相互のセミナーの訪問・開催などを通して情報交換を行う。京都大学、熊本大学、東京大学のパンルベ方程式の研究グループとも、研究会の参加を通して当該研究に生かす。芝浦工大、千葉大等の研究グループも研究内容が近いので、定期的に情報交換を行う。また国外ではスペインとポーランドで国際会議を年に１回のペースで開催することで準備中であるのでこれに参加して研究に生かすようにする。

（３）爆発現象等の大域解析について。基礎的な部分は申請者が研究を進めてきた内容を発展させる形で継続する。この研究テーマはボレル和の特異性の研究とも関係が深い。広島大学のグループはこのテーマを resurgent 解析の立場から研究しているので情報交換と討論を行い相互の研究に役立てる。

（４）上記以外の研究計画について。主にストークス幾何の概念を偏微分方程式に拡張して接続問題などの大域解析を研究する。この研究の基礎理論のため、偏微分方程式のパラメトリックボレル総和可能性の大域版を証明する。これは常微分方程式に対応する結果があるので、それを参考にして研究を進める。つぎに、偏微分方程式のボレル和のストークス図形を用いた大域解析であるが、未知の部分が多いので具体例の研究を中心にして研究を進め、関連した研究者との情報共有なども行う。つぎに、非可積分性への応用あるいは（２）と密接に関係するが、ハミルトン系の動く特異点の研究についてもボレル総和法の研究の進展に応じて取り組むようにする。

４．研究成果

（１）研究の展開と成果。研究は３年間にわたって行われ、年度ごとの研究成果は以下のようであった。初年度は偏微分方程式に対応する（無限次元）力学系の変換論とボレル総和法の研究を中心に行い、ボレル総和法を偏微分方程式に拡張することおよび微分方程式の動く特異点の研究をおこなった。ここで動く特異点は非可積分性に深く関係しているのでテーマとして選択した。２年目は数理物理の偏微分方程式から導かれたハミルトン系のバーコフ変換ともとの偏微分方程式の爆発解との関係およびボレル総和法の研究を実行した。さらに非ボレル総和可能性を研究した。次に、ハミルトン系の動く特異点とバーコフ変換およびその爆発現象への応用の研究を行った。３年目は考えるハミルトン系の一般化されたバーコフ変換、動く分岐点とボレル総和法の研究を実行した。また生態系モデルへのボレル総和法の応用を研究した。得られた研究成果のうち主なものについて以下で詳しく述べる。

（２）偏微分方程式に対するボレル総和法。

非ボレル総和可能性と特異摂動パラメータに関するパラメトリックボレル総和可能性を研究した。これらのうち特に重要なパラメトリックボレル総和可能性について述べる。これらの研究はハミルトン系に対する動く特異点の研究や力学系の視点からの非可積分性の研究、非線形シュレディンガー方程式等の爆発解の研究に応用を持つ。ボレル総和可能性を考える対象とする方程式は、ハミルトン系のバーコフ標準形理論において現れる変換方程式であるホモロジー方程式系といわれる、一階の半線形偏微分方程式系である。これに対して、パラメータについての形式解である特異摂動解を考える。この解は収束しない解いわゆる形式解であるが、このパラメータに関するボレル総和可能性を考える。これをパラメトリックボレル総和可能性という。簡単に言うとこの意味でのボレル総和可能性を証明することがバーコフ変換の存在を保証する。そうすると、動く特異点の情報や爆発解の情報がバーコフ変換を経由して得られる。よってボレル総和可能性は解析的に重要な役割を果たしている。さて常微分方程式に対するボレル総和法理論はかなり研究が進んでいるが、偏微分方程式に対してはまだ基本的なことも常微分方程式ほどにはわかっていない。さらに当該研究では、動く特異点などの特異点を持つ解を考えるので、従来の研究の枠組みと異なり、ホモロジー方程式の変わり点の近くでのボレル総和可能性を示す必要がある。さらに特異性の構造を知るためには、ボレル和の大域的な情報も必要になる。当該研究ではこれらのことが証明され、これを用いて以下の動く特異点等の研究が可能になった。

（３）ハミルトン系の動く特異点。

極以外の動く特異点を持たない方程式の研究に関してはパンルベ方程式等の膨大な研究がなされてきた。このような方程式達はまた力学系の可積分性の研究とも関係し、重要な研究テーマである。他方、流体等の数理物理への応用ではChazy方程式などの動く特異点を持つ方程式も重要である。このような方程式達は非可積分性とも関係し、最近では動く特異点を持つハミルトン系の研究が欧米を中心になされている。我々はこのような方程式達が数理物理の方程式の解の爆発の研究においても重要な役割を果たすことを先行研究で示しており、このような点から動く分岐点を持つ方程式達の研究を提案した。さて、このような動く分岐点を持つ方程式の研究では、古典的なパンルベテストを用いた研究が知られている。動く分岐特異点が無限個起こる例などは比較的簡単に示せるが、その構造は古典的な方法では知ることはできない。これに適用可能な一般的方法は知られていない。当該研究では、この場合に、ボレル総和法を基礎にしたバーコフ変換理論の一般化を用いた方法を提案した。この方法は、無限個の動く分岐特異点を持つ解を構成することができ、動く分岐特異点がどのように表れてくるのかを明らかにすることができる。実際、ハミルトン系に対応する相空間のコンパクト化をおこない、さらに適切なblowupを実行して動く特異点の位置を与えることができる。この方法はまた古典的なパンルベテストの方法を自然に含む結果になっている。

（４）数理物理の方程式の解の爆発。

半線形波動方程式、シュレディンガー方程式あるいは熱方程式の初期値問題では解の爆発現象の研究は長く研究されてきた重要な問題であり、現在も精力的な研究が行われている。当該研究ではこのテーマに力学系のバーコフ理論という視点から研究を行った。解析的には従来の方法に加えてボレル総和法を用いた研究である点が新しいといえる。このアプローチの背後には動く分岐点を持つ方程式達がおり、動く特異点と解の爆発は密接につながっている。これはまた、動く分岐点を持つ方程式例えばHeun方程式の重要性も示唆している。当該研究で得られた主な結果は光錐上のすべての点を特異点とする解をヤコビの楕円関数を用いて構成できたということである。また当該研究では一般的なハミルトン系の枠組みで議論を実行しており、上記以外にもいくつかの応用例を持つことも特徴となっている。

（５）生態系のモデルへのボレル総和法の応用。

当該研究で対象としている生態系モデルの方程式は３種系のロトカボルテラ方程式あるいは形質の小進化を含んだ３種系ロトカボルテラ方程式である。これらの方程式は解がカオス的な挙動をすることも多く、従来の相空間解析では時間無限大の挙動の解析において十分な情報を得られない。従来の方法とは異なりボレル総和法を用いた解の構成を行った。この研究は今後も継続する予定である。

（６）得られた成果の国内外における位置づけとインパクト、今後の展望。

当該研究での主な成果はまず、ハミルトン系の動く特異点の構造を力学系の基本的な方法であるバーコフ理論を用いて明らかにした点である。詳しく述べると、ハミルトン系の一般化されたバーコフ変換から得られる標準的なハミルトン系の動く特異点の情報から、もとのハミルトン系の動く特異点の情報が得られることを証明した。この結果により、動く特異点を発生させる機構を考察するとき、ある標準的な力学系の挙動が重要であることがわかった。この結果にたいしては国内外からの講演依頼や論文執筆依頼などの反響があった。次に重要な点としては、このバーコフ変換の存在証明において重要な役割を果たしたボレル総和法に関する成果がある。実際従来のパラメトリックボレル総和法理論の偏微分方程式に対する拡張を行うとき、動く特異点を持つ解の構成ではsemi globalなパラメトリックボレル総和可能性を考えることが重要であり、これを実行した。この結果も幸い国内外から講演依頼をいただき、ボレル総和法の研究テーマとしても興味ある研究テーマであろうと思われる。最後に、生態系モデルへのボレル総和法理論の応用に関しては、進化型３種ロトカボルテラ系ばかりでなく感染症モデルにも同理論が適用可能であり、まだ研究中であるが、得られた結果について論文執筆依頼を国外から受けた。現在の世界の状況を見るとき、これも興味あるテーマとして研究を継続する価値があると思われる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計9件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　6件）

１．著者名 Masafumi Yoshino and Kenji Kurogi	４．巻 B75
２．論文標題 An example of a non 1-summable partial differential equation	５．発行年 2019年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 203-209
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 26:8
２．論文標題 Movable Singularity of Semi Linear Heun Equation and Application to Blowup Phenomenon	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Nonlinear Differ. Equ. Appl.	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00030-019-0555-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 -
２．論文標題 Movable singularity of some Hamiltonian system	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Proceedings "Complex Differential and Difference Equations", De Gruyter Proceedings in Mathematics	６．最初と最後の頁 147-170
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 印刷中
２．論文標題 Analytic continuation of a parametric Borel sum	５．発行年 2020年
３．雑誌名 数理研講究録	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 2101
２．論文標題 Movable Singularity and Blowup of Semi linear Wave Equation	５．発行年 2019年
３．雑誌名 数理研講究録	６．最初と最後の頁 178-183
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 -
２．論文標題 Parametric Borel summability of partial differential equations of irregular singular type	５．発行年 2017年
３．雑誌名 G. Filipuk et al. (eds.), Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics	６．最初と最後の頁 455-471
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-319-52842-7-15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 B61
２．論文標題 Parametric Borel summability for semilinear partial differential equation	５．発行年 2017年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 237－253
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 B75
２．論文標題 Movable singularity of generalized Emden equation via Birkhoff reduction	５．発行年 2019年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 089-099
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Masafumi Yoshino	4．巻 2020
2．論文標題 Monodromy of confluent hypergeometric system with two irregular singular points	5．発行年 2017年
3．雑誌名 数理研講究録	6．最初と最後の頁 129-136
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　8件／うち国際学会　8件）

1．発表者名 Masafumi Yoshino
2．発表標題 Movable singularity of solutions of a Hamiltonian system
3．学会等名 RIMS conerence（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Masafumi Yoshino
2．発表標題 Borel summability and movable singularity of Hamiltonian system
3．学会等名 FASFE19（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Masafumi Yoshino
2．発表標題 Movable Singularity of Some Hamiltonian System and Normal Form Theory
3．学会等名 FASPDE18（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

１．発表者名
Masafumi Yoshino

２．発表標題
Movable singularity of some Hamiltonian system and blowup of semilinear wave equation

３．学会等名
The Banach Center School Complex Differential and Difference Equations Bedlwo 2018（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Masafumi Yoshino

２．発表標題
The linearization problem for holomorphic vector fields and parametric Borel summability

３．学会等名
The Banach center conference Complex Differential and Difference Equations 2018（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Masafumi Yoshino

２．発表標題
Parametric Borel summability of some partial differential equation related to construction of movable branch points

３．学会等名
RIMS conerence（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Masafumi Yoshino

２．発表標題
Parametric Borel summability of first order partial differential equation without Poincare condition

３．学会等名
RIMS conference（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Masafumi Yoshino

２．発表標題
Blowup of semilinear hyperbolic equation and monomial summability of normalizing transformation

３．学会等名
FASdiff17（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究成果報告のあるウェブサイト
https://home.hiroshima-u.ac.jp/yoshinom/paper.html
https://home.hiroshima-u.ac.jp/yoshinom/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考