

令和 3 年 5 月 19 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05332

研究課題名(和文)非線形分散型方程式に現れる平面進行波解の安定性解析

研究課題名(英文)Stability analysis for planar traveling solutions for nonlinear dispersive equations

研究代表者

水町 徹 (Mizumachi, Tetsu)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・教授

研究者番号：60315827

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：3次元水面波の長波長近似モデルであるBenney-Luke方程式の線状孤立波解の横断安定性を証明した。波が単一の方向に進むことを想定したKP-II方程式と異なりBenney-Luke方程式は空間等方的なモデルであるが、線状孤立波の稜線に沿った波の伝播はKP-II方程式とほぼ同様になることが分かった。またBenney-Luke方程式とKP-II方程式の線状孤立波(1-線ソリトン)の摂動による位相のずれの最大値ノルムは時間が経っても小さなままであることが分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元水面波の長波長近似モデルの線状孤立波解の全空間における安定性は、完全可積分系の方程式であるKP-II方程式の場合に知られていたが、完全可積分系でないBenney-Luke方程式に対しても同様の結果を得ることが出来た。

研究成果の概要(英文)：I prove transverse stability of line solitary wave solutions for the Benney-Luke equations which is a long wave model for 3-dimensional water waves. The Benney-Luke is an isotropic model whereas the KP-II equation is a unidirectional model. Nevertheless, it turns out that perturbations to a line solitary wave propagate along its crest in the same manner as those for the KP-II equation. I also prove that phase shift of modulating line solitary waves for the KP-II equation and the Benney-Luke equation remains small for all the time.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：Benney Luke 方程式 線状孤立波解 安定性 長波長近似モデル KP-II方程式

## 1. 研究開始当初の背景

遠浅の海岸に現れる線状孤立波とよばれる横断方向(進行方向と鉛直な方向)に一様な波は安定的に伝播する。KP 方程式はこのような水面の運動を説明するために提唱された長波長近似モデルであり、波の横断方向への変化が進行方向に比べて緩やかに変化することを考慮に入れて導出された空間異方性のある完全可積分系の偏微分方程式である。KP 方程式のうち、KP-II 方程式が表面張力の影響が弱い水面の運動に対応する。KP-I 方程式の線状孤立波は不安定なことが知られている。以前の研究により、1-線ソリトンとよばれる KP-II 方程式の平面進行波解が弱い意味で横断安定であることや、その変調する様子は線形化作用素の重み付き空間における  $\omega=0$  のまわりにある連続共鳴固有モードの時間発展と類似していることが分かっていた。前回と前々回の研究課題においては、摂動によって変調する線ソリトンの位相のずれは広義一様に定数に収束し、変調する線ソリトンが時間とともに平坦になることが分かっていたが、横断方向の遠方において線ソリトンの位相のずれが時間とともに増大する可能性を排除できていなかった。

また前回の研究課題では Benney-Luke 方程式とよばれる空間等方的な長波長近似モデルの線状孤立波解のまわりでの線形化作用素も低周波領域では KP-II 方程式と同様のスペクトル構造を持つことを証明した。

KP-II 方程式は複数の線ソリトンが交差する多重ソリトン解を厳密解にもつことが知られ、可積分系理論の立場からもその分類や多重ソリトン解の周りにある一般解の構成について研究が行なわれているが、多重線ソリトンの安定性に関する結果は未だ知られていない。

全空間における線状孤立波の安定性の研究は、基底定常波解をもつような非線形分散型方程式の安定な解にはならない(Rousset-Tzvetkov)という否定的な結果を除けば、前回と前々回の研究課題における KP-II 方程式の 1-線ソリトンの安定性と Benney-Luke 方程式の線状孤立波の線形安定性の結果以外は知られていなかった。

一般化 KdV 方程式の安定な孤立波解に摂動を加えた場合、線形化作用素はパラメータの自由度と同じ多重度の 0 固有値を持つものに対して、全空間における線状孤立波の変調は横断方向に一様ではないため、線状孤立波の周りで線形化作用素には  $\omega=0$  を端点とする連続固有値の曲線が現れる。そのため孤立波の速度や位相などのパラメータの変化は常微分方程式系によって記述されるのに対して、全空間における線状孤立波の変調はパラメータの横断変数と時間に関する偏微分方程式によって記述される。研究の進んでいる非線形熱方程式の平面進行波解は、初期の研究を除き多くの結果が 2 階単独の放物型方程式に特有の最大値原理に依拠している。分散型方程式は最大値原理が成り立たないだけでなく、放物型方程式とはスペクトル構造も異なる。線状孤立波に比べてより安定性が高いと見込まれる線状キंक解の場合でも、Cuccagna による<sup>4</sup>モデルの研究('08)以外は知られていない。

## 2. 研究の目的

KP-II 方程式は完全可積分という特別な構造を持つため、KP-II 方程式に対して知られている安定性の結果を他の長波長近似モデルに対して証明することには意義がある。また空間等方性のあるモデル方程式は波が様々な方向に伝播することを許容するため、波が単一の方向に伝播することを想定した KP-II 方程式よりも多様な解を含み元の水面波方程式の性質をより反映すると考えられる。

Boussinesq 方程式系のように多方向への波の伝播を許容する 2 次元長波長近似モデルに対して線状孤立波解の安定性を示すこと、さらに KP-II 方程式の多重線ソリトン解の安定性解析に必要と思われる方法を準備することを目的とした。

## 3. 研究の方法

前研究課題によって得られた KP-II 方程式の線ソリトンの安定性解析の方法を発展させ、線ソリトンの摂動による位相のずれが大きくなることを示すことで、変調する線ソリトンの様子を横断変数に依らない進行波座標系で調べることができるようにする。このような評価は、正則化 Boussinesq 方程式系のように高周波部分の平滑化効果が弱く、移流項を摂動として扱うことが出来ない方程式に KP-II 方程式の 1-線ソリトンの安定性解析の方法を適用する上で必要になる。

Benney-Luke 方程式の線状孤立波解の周りの解を変調する線状孤立波部分とその周囲にある摂動部分、線状孤立波より進行速度が遅い微小な Benney-Luke 方程式の解および線状孤立波の部分的な隆起・沈降と釣り合いをとるように後方に吐き出される波を表す部分に分け、線状孤立波の周りにおける摂動に対して線形化作用素の  $\lambda=0$  の周りの連続共鳴固有値に対応する共役連続共鳴固有関数の族に対する直交するという永年項条件から線状孤立波のパラメータのみならず消散波動方程式系を導出し、その解の評価を行った。また線状孤立波解は横断方向に減衰しないためそのエネルギーノルムは発散するが、その周囲にある解は線状孤立波などのエネルギーが非有界部分を除き、さらに線状孤立波のパラメータが満たす永年項条件を使ってエネルギー密度関数を書き換えると近似的にエネルギー保存則がみたされることを証明した。

空間 1 次元の完全可積分系方程式の多ソリトン解の安定性の証明には、 $N$  ソリトン解と  $(N-1)$  ソリトン解の対応を与えるベックルンド変換が有用なことが知られており、空間 2 次元のモデルである KP-II 方程式においても、ダルブー変換が自明解のまわりでの線形化方程式の解空間と 1 線ソリトン解のまわりでの線形化方程式の解空間から共鳴連続固有モードを除いた部分空間との間の同型対応を与えている。ダルブー変換を用いて弾性 2 線ソリトン解のまわりでの線形化方程式の解空間と 1 線ソリトン解のまわりでの線形化方程式の解空間の関係を調べることを目指した。

広島数理解析セミナーや可積分系の手法と非線形分散型方程式の融合研究で研究に関する情報収集を行った。

#### 4. 研究成果

1) KP-II 方程式の線ソリトン解の変調を記述する消散波動方程式のより精密な解析を行い、線ソリトンに加える摂動が小さければ、線ソリトンの位相のずれは空間 1 次の波動方程式の解のように平坦な部分が時間とともに広がるが、その横断変数  $y$  と時刻  $t$  についての最大値ノルムは小さいことを示した。

2) Benney-Luke 方程式の線状孤立波解の横断安定性を証明した。

3) KP-II 方程式の 2-線ソリトン解のうち、弾性ソリトンとよばれる定常進行波解の変調に関係すると思われる連続共鳴固有関数の族の具体的な表示式を求め、共役連続共鳴固有関数の族との間の直交関係式を示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mizumachi Tetsu, Shimabukuro Yusuke	4. 巻 52
2. 論文標題 Stability of Benney--Luke Line Solitary Waves in 2 Dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 4238 ~ 4283
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/19M1253848	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Mizumachi Tetsu	4. 巻 83
2. 論文標題 The Phase Shift of Line Solitons for the KP-II Equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Fields Institute Communications	6. 最初と最後の頁 433 ~ 495
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-1-4939-9806-7_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tetsu Mizumachi	4. 巻 148
2. 論文標題 Stability of line solitons for the KP-II equation in $R^2$ . II.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A	6. 最初と最後の頁 149-198
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0308210517000166	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tetsu Mizumachi and Yusuke Shimabukuro	4. 巻 30
2. 論文標題 Asymptotic linear stability of Benney-Luke line solitary waves in 2D	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 3419-3465
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/aa7cc7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 水町 徹
2. 発表標題 Stability of line solitary waves for some long wave models
3. 学会等名 2019 Workshop on Nonlinear Dispersive Partial Differential Equations and Inverse Scattering (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 水町 徹
2. 発表標題 On the phase shift of line solitary waves for the KP-II equation
3. 学会等名 Workshop on Nonlinear Water Waves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 水町 徹
2. 発表標題 On stability of line solitary waves for long wave models
3. 学会等名 第36回九州における偏微分方程式研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tetsu Mizumachi
2. 発表標題 Asymptotic Linear Stability of Benney-Luke line solitary waves
3. 学会等名 Workshop on Inverse Scattering and Dispersive PDEs in Two Space Dimensions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tetsu Mizumachi
2. 発表標題 Asymptotic Linear Stability of Benney-Luke line solitary waves
3. 学会等名 Tosio Kato Centennial Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 2017 Participating school in analysis of PDE, Stability of solitons and periodic waves	開催年 2017年～2017年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------