

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 11 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05334

研究課題名(和文) 非線形拡散反応系における漸近展開法の開発とその応用

研究課題名(英文) Development and Application of Asymptotic Expansion Method for Nonlinear Reaction-Diffusion Equations

研究代表者

辻川 亨 (TsujiKawa, Tohru)

明治大学・研究・知財戦略機構(生田)・研究推進員(客員研究員)

研究者番号：10258288

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：2変数反応拡散方程式の定常解の構造を解明するために、ある種の縮約系を解析することは重要な問題である。多くの場合、その縮約系は積分制約条件付きのスカラー方程式、または非局所項を含む方程式である。

本研究では非局所項を含むAllen-Cahn方程式の定常問題について、すべての定常解の構造を決定した。特に、拡散係数を分岐パラメータとして、定数解からの1次分岐(対称解)とそこから2次分岐(非対称解)の存在を示した。また対称解が2次分岐点を境にその安定性を変えることも示した。解析には完全楕円積分を用いた定常解の解表示が重要な役割を果たした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自然現象を記述するモデルとして反応拡散方程式が幅広く研究されている。その定常解などの存在や安定性を解析することは重要であり、パラメータに関する大域的な解構造を決定するという観点から研究を進めている。本研究は非局所項を含むAllen-Cahn方程式の定常問題について、完全楕円積分を用いた解表示による解析が中心であり、その存在証明が困難な2次分岐構造を示した。その過程で完全楕円積分に関する有用な公式を得た。この解析手法は金属の融解問題を記述したPhase-Fieldモデルや細胞の極性を記述したモデルに適用が可能である。

研究成果の概要(英文)：To clarify the structure of stationary solutions of two-variable reaction-diffusion equations, it is an important problem to analyze some kind of reduced systems. Often the reduced system is a scalar equation with integral constraints or an equation with nonlocal terms.

In this study, we determined the structure of all stationary solutions of the Allen-Cahn equations including nonlocal terms. In particular, we showed the existence of a first bifurcation (symmetric solution) from the constant solution and a second bifurcation (asymmetric solution) using the diffusion coefficient as a bifurcation parameter. We also showed that the stability of the symmetric solution changes at the secondary bifurcation point. The representation of stationary solutions using complete elliptic integrals played an important role in our analysis.

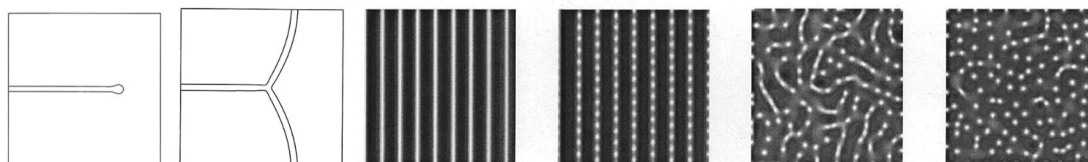
研究分野：非線形微分方程式

キーワード：反応拡散方程式 定常問題 楕円積分 分岐現象

1. 研究開始当初の背景

反応拡散方程式に関する研究は、Turing不安定性の発見を契機として発展してきた。また、Keller-Segelなどの移流項を持つ方程式に関する研究成果も多数公表されている。一方、三村と辻川(1993年)は、走化性と増殖効果が同じ時間スケールで観察される現象を記述した数理モデル(**CGモデル**)を提唱した。このモデルは、ある種の細胞性粘菌(大腸菌など)について、BudreneとBerger(Nature, 1991)により得られた実験結果をある状況では再現している。一方、栄養濃度を考慮したAomotoら(2010)による4変数モデルの提案もあるが、実験結果を十分に再現しているとは言えない。また、同種の2変数非線形拡散反応方程式としてErtleにより提唱された金属表面上の触媒反応現象を記述したモデル(**ADモデル**)がある。この方程式について、Mikhailovら(1999)は漸近展開法と数値計算を用いて1次元および軸対称定常解の存在を示した。一方、同時期に申請者も同様の結果を得た。しかし、方程式に含まれるパラメータに関する大域的な(定常解、進行波解など)解および力学的構造は十分解明されているとは言えない。また、2次元領域における問題については軸対称定常解の存在や安定性などが議論されている(Mimura, Tsujikawa(1996))。関連した研究として、平面進行波の不安定化により出現した棒状及び三叉構造を持つ進行波解は燃焼や過冷却などの問題に頻繁に表れる現象であり、この方面の理論的な結果も多数あるが我々の問題に直接は応用できない。また、2次元領域での進行波解について、本質的に1次元解である平面波解、進行スポット(Chen, Kosaka, Ninomiya (2014))、V字状の相似形進行波解(Ninomiya, Taniguchi (2005, 2015))など比較的単純なものの以外の結果は見当たらない。

また、走化性効果を強くした場合、定常解の指数アトラクターの次元を計算することで、システムがより複雑なパターンを生み出すことを説明した(Aida, Tsujikawa, Efendief, Yagi (2006))。一方、数値計算により、2次元進行波解の存在やその速度に関する非単調性を示した。



化学反応波を記述する反応拡散方程式(**BZモデル**)について、Zykovらは興奮波のフロント部分を曲線近似することで、縮約系としてのキネマティック方程式を提案し、スパイラル波の挙動等の解析に応用した。また、複数のスパイラル波の挙動、及び空間非一様な反応場におけるパターンの解明に、この方程式の有用性とその適応範囲の観点から、弧状パターンの存在と安定性を示した(Sakurai, Osaki, Tsujikawa (2008))。

遺伝子の伝搬モデルに関するNagylaki, Lou (2008)の予想に関するいくつかの結果がある(Nakashima, Ni, Su (2010), Lou, Nagylaki, Ni (2013))。これらは拡散係数が十分小さい場合に複数の定常解の存在や安定性を、比較定理などを用いて証明している。この方程式(PG)の解析の困難さは空間依存で退化Logistic型の反応項であることに起因している。また、空間依存を記述する関数の積分量が解構造の多様性に影響を与えているが、その全体像は不明である。一方、Feltrin, Sovranoらは区分的定数関数を導入することでTime Map法により定常解を構成している。Fleming (1975), Senn (1983)は非退化のLogistic型の反応項について、定常解からの分岐構造を示した。

Kuznetsov, Antonovsky(1981)により提唱された、森林を形成するある種の樹木を幼年期と青年期に分類し、青年木が生成する胞子の拡散による森林成長のメカニズムを記述する森林成長モデル(AFモデル)について、定数解からの分岐現象や時間大域解の存在およびその漸近挙動である指数アトラクターの次元に関する結果を示した(Aida, Tsujikawa, Efendief, Yagi, 2009)。また、定数解の安定性と無限に多くの不連続な定常解の存在を示した(Chuan, Tsujikawa, Yagi (2009))。Yagi, Primicerio (2014)は胞子の生成を抑える効果を導入した現実的なモデルを提唱し、森林成長が非有界となる場合に対応した解の存在を示した。

2. 研究の目的

反応拡散方程式の定常解を全て求めることや安定性を含めた解構造を決定することは自然現象を理解する上でも重要な問題である。これまで移流項を含む反応拡散方程式を中心に研究を進めてきた。方程式の形によっては解析が困難なことも多く、パラメータの値を無限大や0にすることで方程式の縮約を図るという方向でアプローチしてきた。その場合、積分制約条件の下での微分方程式の解法が必要となる。この問題に対して、Kuto, Tsujikawa (2013)は分岐理論と等高線解析などにより、定常解の大域的構造を決定する条件を示した。しかし、構造が曲線表示可能か、定数解からの2次分岐構造が存在するかなどを示すには不十分なところがある。また、金属触媒反応モデルの縮約系を解析する中で同様2次分岐現象が出現することを予想した。

2次分岐については、定数解からの分岐による非定数解の存在、および特異摂動法、比較原理などにより構成される解の存在などの研究がある(L. Bauer, H. Keller, D. Reiss (1975), T. Mahar, B. Matkowsky (1977), F. Davidson (1999))。しかし、非定数解からの2次分岐を扱っている論文は少ない(A. Aftalion, S. Chapman (2000)など)。

特に金属触媒反応モデルについて、定数解から1次分岐した対称解からなる解曲線の端点の情報のみで(2次)分岐の存在を試みたが反応項の複雑さにより十分な結果を得ていない。そこで類似な現象が期待できる非局所項を含むAllen-Cahn方程式を導入し、その解析を進めることにした。この方程式は限定された反応項の形ではあるが完全楕円積分などを用いた解表示が可能であるという特徴をもち、証明が可能であると思われる。この解析方法はいくつかのモデル、例えば金属の融解現象を記述したPhase-Field model (Fix (1983), Caginalp (1986))、Cell Polarity model (Mori, Jilkine, Edelstein-Keshet (2011))などへの応用も可能であると考えられる。細胞極性モデルについては数値的に定数解からの2次分岐現象が起こることが示されている(Mori, Jilkine, Edelstein-Keshet (2011), Mori, Kuto, Nagayama, Tsujikawa, Yotsutani (2015), Mori, Kuto, Tsujikawa, Yotsutani (2016))。また、Phase-Field方程式の定常問題については、Elliott, Zheng (1990), Zheng (1995)による変分原理を用いた、非定数定常解の存在及び発展方程式の漸近挙動の研究、Suzuki, Tasaki (2009)によるTime Map法を用いたパラメータに関する非定数定常解の存在、非存在の結果があるが、十分に解構造を解明しているとはいえない。

森林形成モデルについて、植生に関して風、発芽期間などの影響、繁殖のメカニズムを考慮した拡張森林モデルを提唱し、その解析を行うことは、数理生物学において重要な問題であり、2次元領域での定常解や進行波解の存在、安定性を含めた力学的解構造構造を明らかにしていく。

遺伝子の伝搬モデル方程式(PG)について、大域的な解構造を解明することのための第一歩として定数解(1つの遺伝子のみ生き残る場合に対応する)からの分岐が起こることを示すために、線形化固有値問題において単純零固有値が存在することを示す必要がある。その場合、モデル

からの要請である解の制約条件を緩和することが重要となる。それに伴い、これまで存在が調べられていない定常解についても考察する言及する。一方、もう1つの解である零定数解は退化しているため一般的な分岐理論を適用することできないため、新たな方法で証明する必要がある。

3 . 研究の方法

反応拡散方程式の定常解について、方程式に含まれるパラメータに関する定常解やその安定性を含む大域的な解構造を解明するためには解決困難な部分が存在する。この点を回避する方法として、適切なパラメータの値を無限大や0にすることで方程式の縮約系を導出し、その解析を行う方法をとる。多くの場合、積分制約条件の下での微分方程式が得られるが、その解法として特異摂動法、分岐理論などが適用可能となる。また、一般的な積分制約条件を持つスカラー反応拡散方程式について、解の大域的構造を決定する条件が Kuto, Tsujikawa (2013)により積分写像に関する Level Set 法と分岐理論を用いて示された。

また、反応項が Allen-Cahn 型であるとき、Wakasa (2009), Wakasa, Yotsutani (2015)によりスカラー反応拡散方程式の定常解が完全楕円積分を用いて表示されることが示されている。この方法を、積分制約条件付きの問題の定数解からの2次分岐の存在や対称解の安定性などの問題の解析に適用する。

Phase-Field model、Cell Polarity model については Allen-Cahn モデルでは出現しないような対称解からのピッチホーク分岐や、パラメータの連続変形による不完全分岐が予想される。対称解からの不完全分岐を示すために、例えば Liu, Shi, Wang (2007), Kan, Miyamoto (2013)の結果の適用が期待される。一方、解析が困難な部分については分岐追跡ソフトの AUTO などを用いて計算する。

非局所 Allen-Cahn 方程式、Phase-Field モデル方程式の定常解のパラメータにおける存在可能領域は有界領域であるが、細胞極性モデル方程式については存在領域が非有界となることから解表示は容易ではない。そこで、適当な変換により矩形領域に移すことでこれまでの結果の一部を応用する可能であるが、変換において特異性を回避する工夫が必要である。

走化性モデル方程式の縮約系である積分制約条件付き単安定スカラー方程式の定常解の大域的構造を決定する問題について、数値計算により定数解から1次分岐した解は安定であるがその後不安定化することを求めた。この時、Hopf 分岐により安定な周期解が出現すると予想され、これも2次分岐現象と捉えることができる。しかし、1次分岐点から離れているため一般的に解析が難しい問題であるが、この周期解の出現と関連して、この方程式の別の縮約系(Shadow System)から弛緩振動現象を数値計算により得た。同様の問題について、Ei, Izuhara, Mimura (2014)によりある種の条件を仮定した場合の理論的な結果はすでに公表されているので、Shadow System という方程式の特性を生かして、この仮定を課さない証明を試みる。解に関する順序保存系ではないが、その考え方を応用した証明方法が可能である。

4 . 研究の成果

走化性モデル方程式について、定常解の大域的解構造を決定する問題は未解決として残されているが、移流と拡散係数を無限大とした縮約系について、Kuto, Tsujikawa (2013)の結果である、ある種の積分制約条件を課した反応拡散方程式についての定常解の大域的構造を決定する条件と Level Set 法を適用することで適切なパラメータ空間を設定し、定数解から分岐した枝が別の

定数解および特異摂動解につながる解構造を明らかにした。また、パラメータに関する分岐の単調性に関しては、数値計算により示した (Izuhara, Kuto, Tsujikawa (2017))。

非局所 Allen-Cahn 方程式のノイマン境界値問題について、Kuto, Tsujikawa (2013)の結果を適応して定数解から対称解が分岐し、その枝が内部遷移層を持つ解につながる事、および拡散係数が小さい場合にはほかの特異摂動解の存在を示した。しかし、この方法では定数解からの2次分岐点の存在を示すことはできない。そこで、完全楕円積分による対称解の表示を用いて、モースの補題の非退化条件を調べ、その存在が示された。また、2次分岐点の一性も証明した(Kuto, Mori, Tsujikawa, Yotsutani (2017))。

定常解の大域的構造は2次分岐が起こる制限されたパラメータの領域内で証明した。それ以外の領域での定数解からの非対称解な分岐に関する大域的な解構造をすべて示した。この証明には、非局所項を積分写像とみなし、そのレベルセットの解析を用いた (Kuto, Mori, Tsujikawa, Yotsutani (2018))。

これまで、対称解の完全楕円積分の表示のみを利用して、解に大域的な構造を調べてきた。しかし、定数解からの2次分岐の方向および、分岐後の枝の単調性などは未解決の問題である。そこで、非対称解や非局所項に対応した積分写像の具体的な表示を得ることは重要な問題である。新たに完全楕円積分の公式を作ることでこの表示式を求めることができた(Kuto, Mori, Tsujikawa, Yotsutani (2020))。

また、定数解から1次分岐した対称解の安定性について、1次分岐直後の解は不安定であるが、2次分岐点を過ぎると安定性を回復することを示した。線形化固有値問題において固有値はすべて実数であり、最大固有値のみが正から負に2次分岐点を過ぎるところで符号を変化させ、それ以外の固有値はすべて負となる。方程式の対称定常解を用いて線形化固有値問題の固有関数が表示できるという事実に基づいて証明した。2次分岐解の安定性について、特異極限法により拡散係数が十分小さい場合には実部が正の固有値がただ1つ存在することも示すことができる。(Miyamoto, Mori, Tsujikawa, Yotsutani (2021))。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 1. Yasuhito Miyamoto, Tatsuki Mori, Tohru Tsujikawa, Shoji Yotsutani	4. 巻 275
2. 論文標題 Stability for stationary solutions of a nonlocal Allen-Cahn equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 581-597
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2020.11.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Mori Tatsuki, Kuto Kousuke, Tsujikawa Tohru, Yotsutani Shoji、	4. 巻 40
2. 論文標題 Representation formulas of solutions and bifurcation sheets to a nonlocal Allen-Cahn equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 4907 ~ 4925
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2020205	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Miyamoto Yasuhito, Mori Tatsuki, Tsujikawa Tohru, Yotsutani Shoji	4. 巻 275
2. 論文標題 Stability for stationary solutions of a nonlocal Allen-Cahn equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 581 ~ 597
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2020.11.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Izuhara, Kouske Kuto and Tohru Tsujikawa	4. 巻 35
2. 論文標題 Bifurcation structure of stationary solutions for a chemotaxis system with bistable growth	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 441-475
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-017-0298-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kousuke. Kuto, Tatsuki. Mori, Tohru. Tsujikawa and Shoji. Yotsutani	4. 巻 264
2. 論文標題 Global solution branches for a nonlocal Allen-Cahn equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equation	6. 最初と最後の頁 5928-5949
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.01.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kousuke Kuto, Tatsuki Mori, Tohru Tsujikawa, Shoji Yotsutani	4. 巻 263
2. 論文標題 Secondary bifurcation for a nonlocal Allen-Cahn equation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Differerntial Equations	6. 最初と最後の頁 2687-2714
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirofumi Izuhara, Kousuke Kuto, Tohru Tsujikawa	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Bifurcation structure of stationary solutions for a chemotaxis system with bistable growth	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 森達樹、辻川亨、四ツ谷晶二
2. 発表標題 Semi-analysis methods of obtaining bifurcation diagrams for a cell polarization model
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森達樹、辻川亨、四ツ谷晶二
2. 発表標題 Representation formulas for stationary solutions of cell-polarization model
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森達樹、田崎創平、辻川亨、四ツ谷晶二
2. 発表標題 Global structure of stationary solutions for the 1-dimensional Fix-Caginalp equation
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 辻川 亨
2. 発表標題 Allen-Cahn-Nagumo 方程式の定常解の大域的構造と安定性について
3. 学会等名 M Z セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tohru Tsujikawa
2. 発表標題 Bifurcation structure of steady states for the one-dimensional nonlocal Allen-Cahn equation
3. 学会等名 12th AIMS conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 辻川 亨
2. 発表標題 非局所項を持つAllen-Cahn型方程式の定常解の大域的構造について
3. 学会等名 第164回愛媛大学解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 辻川 亨
2. 発表標題 非局所項を持つAllen-Cahn型方程式の大域的解構造について
3. 学会等名 第76回HMMCセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 Muller, S.C., Plath, P.J., Radons, G., Fuchs, A. (eds.)	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 421
3. 書名 Complexity and Synergetics	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------