

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05342

研究課題名(和文) モデル理論におけるShelah予想とその解決に向けた研究

研究課題名(英文) Research to elucidate Shelah's conjecture and its related branches in model theory

研究代表者

坪井 明人 (Tsuboi, Akito)

筑波大学・数理物質系(名誉教授)・名誉教授

研究者番号：30180045

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：モデル理論は数学的構造をメタな立場を含めて考察する研究領域であり、構造の飽和拡大を用いて研究される。拡大構造での議論は、最終的に本来の構造に適用され、数学における新たな手法を与えている。数学的構造の考察にあたって重要になるのが、表面からは見えない隠れた構造を発見することであり、そこで用いられるのが、非安定性の度合いを示す各種の不変量である。我々が注目したのは Shelah による不変量であり、直観的には理論  $T$  の飽和構造  $M$  において、 $M$  の  $n$  重積中に存在する互いに独立な strict order の個数を表す。我々は、この普遍量がある種の加法性を有することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モデル理論における安定性理論と呼ばれる学術分野は安定性と非安定性について研究している。構造の理論に安定性があれば、抽象的独立概念が定義される。非安定性を持つ場合は、どの程度非安定性があるかを判断することが重要となる。本研究ではその非安定性の度合を Shelah の定義した  $\text{sr}_d$  を用いて研究した。その系として、 $\text{sr}_d$  を決定するためには、基本的に1変数の場合を考えれば十分であることが分かった。その結果、不変量計算の複雑さが大幅に軽減され、応用面でも大きな成果となった。

研究成果の概要(英文)：Model theory is a research area that considers the mathematical structure from meta standpoints, and is studied using saturated extensions of the structure. Arguments in the extended structure are finally applied to the original structure, giving a novel approach to the study of mathematical structures.

The important thing in studying mathematical structures is to discover hidden structures that cannot be seen from the surface. We focused on the invariant by Shelah. Intuitively, this invariant represents the number of mutually independent strict orders in the  $n$ -th product of  $M$ , where  $M$  is a saturated model of the theory  $T$ . We have succeeded to show that this invariant has a certain additivity.

研究分野：数理論理学

キーワード：モデル理論

### 1. 研究開始当初の背景

一様列の概念は基底の概念の一般化にあたり、理論(完全公理系)の解析に重要な役割を持つ。拡大モデルの中ではその存在は容易に言えるが、大きな濃度を持っていたとしても、与えられた構造の中での存在は、ある種の無限組み合わせ論の定理と関連する。その存在について、なるべく集合論的な議論を排除してモデル理論の枠組みの中で行おうとする試みが念頭にあり、コンパクト性と有限性により議論を用いて行うことに重点を置いた研究を始めようと考えた。

### 2. 研究の目的

本研究においては当初、新しい形の一様列存在定理を構築し、モデル理論の研究を発展させることを目的とした。これにより (i) Shelah の予想の解決と (ii) モデル理論の他分野への応用範囲の拡大を目指した。

その後、理論の複雑さ(あるいは安定性からの距離)を表すモデル理論的不変量の解析が重要であるとの観点から、これらを一様列を用いて研究を進めることになった。

### 3. 研究の方法

研究の実施において、技術的な側面で重要となるのは、一様列の概念である。無限一様列は飽和構造の中に存在し、議論の大幅な単純化に寄与できる。数学の議論においては、引き出し論法を何重にも行い、単純化された理想的な状態を作り出すことが重要となる場合がある。一様列を選ぶことは、最初に理想的な状況を1回作ることにより、引き出し論法を何重にも行う必要がなくなることを意味し、そこに議論の単純化があり、直観に近い議論を可能にするメリットがあると考えられる。本研究においても、一様列および関連概念(一様木、相互一様列)等を駆使して構造解析を行う。

### 4. 研究成果

我々は、Shelah によって導入されたモデル理論的不変量  $\kappa_{srd}^m(T)$  を一様列を用いて研究し、それが準加法的であることを示した。特にその値が無限の場合は、等式  $\kappa_{srd}^m(T) = \kappa_{srd}^1(T)$  を導き、モデル理論の著名なテキスト「Classification Theory」(Shelah 著)で提起された問題に一定の解答を与えた。同じ証明方法を他の不変量  $\kappa_{ird}^m(T)$  の分析にも適用し、これも準加法的であることを示し、上記の書籍で得られた結果を改善した。相互一様列の概念は、我々の証明技術で中心的な役割を果たし、その考察自体も興味深いものを含んでいると考える。

より具体的に  $\kappa_{srd}^m(T)$  の定義を述べる。完全な理論  $T$  は、次のような論理式  $\varphi(x_0, \dots, x_{m-1}, y_0, \dots, y_{n-1})$  とパラメータ列  $b_i \in M$  ( $i \in \omega = \{0, 1, \dots\}$ ) ( $M$  は  $T$  の飽和モデル) で以下の条件を満たすものが存在する場合、厳密順序性 (strict order) を持つと言われる:

(\*)  $\Phi := \{\varphi(M, b_i) : i \in \omega\}$  は、一様に定義された一階定義可能な  $M^n$  の狭義単調増加部分集合列を与える。

$M^n$  に一階定義可能な順序があれば、自明に厳密順序性を持つ。ここで、 $\Phi_0 = \{D_i : i \in \omega\}$  および  $\Phi_1 = \{E_i : i \in \omega\}$  をともに厳密順序性を与える狭義単調列とする。任意の  $(i, j) \in \omega^2$

に対して  $(D_{i+1} \setminus D_i) \cap (E_{j+1} \setminus E_j)$  が空でない場合、 $\Phi_0, \Phi_1$  は独立であると言う。より多数の  $\Phi_i$  間の独立性も自然に定義できる。次に、 $\kappa_{srd}^n(T)$  は、そのような独立した単調増加集合列の族  $\{\Phi_i : i < \kappa\}$  が存在しない最小基数  $\kappa$  として定義する。また  $\kappa_{srd}(T) = \sup\{n \in \omega : \kappa_{srd}^n(T)\}$  とする。このとき、我々の得た結果は次のものである：

定理 A.  $\kappa_{srd}(T) + 1 \leq \kappa_{srd}^m(T) + \kappa_{srd}^n(T)$ .

定理 B.  $\kappa_{srd}^m(T)$  が無限の場合は、 $\kappa_{srd}(T) = \kappa_{srd}1(T) = \kappa_{srd}^m(T)$ .

定理 C.  $\kappa_{ird}(T) + 1 \leq \kappa_{ird}^m(T) + \kappa_{ird}^n(T)$ .

以上の結果は、以下の論文の形で発表をしている。

(\*\*) Kota Takeuchi and Akito Tsuboi, “On the number of independent orders,” *Annals of Pure and Applied Logic*, 172(2), February (2021), doi.org/10.1016/j.apal.2020.102886.

今後は、我々の探求した不変量が、どのように自然な形で現れるかの具体例を探求していくことが重要と考える。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Akito Tsuboi	4. 巻 66
2. 論文標題 Nonstandard methods for finite structures	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Logic Quarterly	6. 最初と最後の頁 253-372
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/ma1q.202000024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kota Takeuchi & Akito Tsuboi	4. 巻 172
2. 論文標題 On the number of independent orders	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annals of Pure and Applied Logic 172 (2):102886 (2021)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.apal.2020.102886	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 坪井 明人 (Tsuboi, Akito)	4. 巻 No.2119
2. 論文標題 Non-expressibility of a class of finite graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 9 -- 12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Akito Tsuboi
2. 発表標題 Keisler's Isomorphism Theorem, CH and Instability
3. 学会等名 RIMS model theory workshop (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akito Tsuboi
2. 発表標題 On coloring of Fraisse limits
3. 学会等名 RIMS model theory workshop
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 坪井明人
2. 発表標題 A remark on Ehrenfeucht theories
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 (金沢大学 9月19日)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 坪井明人
2. 発表標題 Compactness argument for finite structures
3. 学会等名 研究集会「Model Theory Summer School 2019」(東海大学 山中湖)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akito Tsuboi
2. 発表標題 On the number of independent strict orders
3. 学会等名 Model Theory Workshop at RIMS (京都大学数理解析研究所 12月3日)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 坪井明人
2. 発表標題 Finite combinatorics and compactness
3. 学会等名 北陸先端科学技術大学院大学情報科学系セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 坪井明人
2. 発表標題 On the notion of stability
3. 学会等名 モデル理論「夏の学校」研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Akito Tsuboi
2. 発表標題 "Hales-Jewett theorem and model theory"
3. 学会等名 2017 RIMS Model Theory Workshop (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Akito Tsuboi
2. 発表標題 A proof of Hales-Jewett theorem using a nonstandard method
3. 学会等名 組合せ論・モデル理論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 坪井明人 塩谷真弘 佐垣大輔	4. 発行年 2019年
2. 出版社 牧野書店	5. 総ページ数 155
3. 書名 集合入門	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	塩谷 真弘  (Shioya Masahiro)  (30251028)	筑波大学・数理物質系・准教授    (12102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------