

令和 2 年 6 月 9 日現在

機関番号：32675

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05350

研究課題名(和文)ジェネリック構成法の研究

研究課題名(英文)A study on generic construction

研究代表者

池田 宏一郎 (Ikeda, Koichiro)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：60332029

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、Lachlan予想の反例が持つべき条件を調べた。この予想の反例が存在するならば、special typeをもつ非可算範疇的理論でなければならない。この条件を満たす理論の存在は知られていたが、その例を改良したことで、条件を満たすgeneric構造を作ることができた。ホログラフィック構造とは、可算範疇性を弱めた構造である。可算範疇的でないホログラフィック構造として、体から作られた構造がある。可算範疇的でないホログラフィック構造として体を定義できないものがないかという問題があったが、ジェネリック構成法により、この問題を肯定的に解決することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Lachlan予想はモデル理論においてよく知られた予想であるが、約50年前のものであり、現在はこの予想を研究対象にしている研究者は少ない。しかし、モデル理論の発展とともに新たな道具が開発されており、この古い予想にうまく適用できるのではないかと考えた。まだ研究は半ばであるが、少しずつ解決に近づいていると考える。

研究成果の概要(英文)：There exists some famous conjecture which says that if the number of countable models of a theory is finite and not one then the theory is unstable. If there exists a counter-example of the conjecture, it must have a special type. We construct a non omega-categorical theory with a special type, modifying some known example. Holographic structures are similar to omega-categorical structures. There exists a holographic structure that is not omega-categorical. This example is constructed from a field structure. So the following problem naturally arises: Is there a non omega-categorical holographic structure in which no field is definable? We give a positive answer to the problem using generic construction.

研究分野：数理論理学

キーワード：モデル理論 ジェネリック構造

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

モデル理論とは、公理とそれを満たす数学的構造(モデル)との関係を調べる数学基礎論の一分野である。1970年代の Shelah の登場により、古典的モデル理論は安定性理論へと大きな変貌を遂げる。安定性理論の主目的は「公理をモデルの数で分類する」ことにあるが、この目的に関連する2つの重要な予想を、反例を与えることで否定的に解決したのが Hrushovski である。Hrushovski の2つの反例は、有限構造を特殊な方法で貼り合わせて無限構造を作る、という共通の手法をとっており、現在ではその方法はジェネリック構成法と呼ばれている。1990年代までに、安定性理論における未解決問題の多くは解決されたが、現在もなお未解決である重要な予想が2つあり、そのうちの1つが Lachlan 予想(可算モデルの数に関する予想)である。ジェネリック構成法を用いて Lachlan 予想の反例を作る試みを、多くのモデル理論研究者が行ったが、いまだ成功に至っていない。1990年代以降、安定性理論を一般化した理論がモデル理論の主流となり、他の数学の分野に広く応用されている。しかしながら、Lachlan 予想がモデル理論において重要な予想のひとつであることに、現在も変わりはない。

2. 研究の目的

ジェネリック構成法とは、1980年代後半に Hrushovski により開発された、有限構造から無限構造を作る方法であり、現代のモデル理論における重要な構成法のひとつである。ジェネリック構成法が開発された当初、多くのモデル理論研究者が、この構成法を用いて Lachlan 予想の反例を作ろうとしたが、その試みはいまだ誰も成功していない。本研究では、従来のジェネリック構成法の限界を明確にしたうえで、この構成法の一般化を行い、新たなジェネリック構成法を構築することを目的とする。そして、新たに得られた構成法を用いて、モデル理論の有名な予想のひとつである Lachlan 予想に反例を与え、この分野の議論に終止符を打つことを最終目標とする。

3. 研究の方法

本研究では、最終的に Lachlan 予想の解決に近づくために、段階的に次の3つの目標を設定した。

- ・目標1 反例のもつべき条件の設定とその分析(平成29年度の目標)
- ・目標2 新たな構成法の確立と具体例の収集(平成30年度の目標)
- ・目標3 Lachlan 予想の反例作成の試み(平成31年度の目標)

これらの目標を達成するために必要な知識を3項目に分類し、それらの知識を提供する3名と研究代表者からなる研究体制を組織する。この研究体制で効率的に研究を進めるために、3つのタイプの集会を軸に、研究打ち合わせおよび研究発表を行っていく。そして、最終的に得られた結果の客観的評価を確認するため、最終年度に国内研究集会を開催する。目標1および目標2は研究期間内に十分達成可能であると考えられるが、目標3は達成できない可能性もある。しかし、研究計画が予定通りに進まない場合は、途中段階での目標達成が研究成果に結びつくよう、配慮して計画が組まれている。

4. 研究成果

(1) 2017年度:本研究の目標は、Lachlan 予想の反例(安定な Ehrenfeucht 理論)の存在を検討することにある。その第一段階として、

定理1. 安定な Ehrenfeucht 理論が存在するならば、その理論は special type をもつことがわかった。この結果を、2017年5月に開催された Model theory workshop in Shanghai (復旦大学、上海)で発表した。その際に研究集会参加者より、発表内容に対する示唆があり、結果をさらに改良したものを、2017年7月に開催された 15th Asian Logic Conference (NIMS, 韓国)、さらには2017年8月に開催された Logic colloquium 2017 (ストックホルム大学、スウェーデン)で発表した。両研究集会において、本研究内容に詳しい参加者と議論を行い、special type をもつ可算安定な理論の例がすでに存在することがわかった。これらのことを踏まえ、まとめた結果を2017年9月に開催された日本数学会秋季総合分科会(山形大学、小白川キャンパス)、さらには2017年12月に開催された RIMS 研究集会「モデル理論における独立概念と次元の研究」(京都大学数理解析研究所)において発表した。そして、以上の結果をまとめた3つの論文が「On small theories with a special type」(京都大学数理解析研究所講究録2084, 2018), 「Small stable theories with the tree property」(京都大学数理解析研究所講究録2079, 2018), 「On stable theories with a special type」(14th & 15th Asian Logic Conference Proceedings, World Scientific, 2019)である。

(2) 2018年度:本年度は中間目標として、真に安定で可算範疇的でないジェネリック構造を構成することを試みた。まず、2018年5月に研究集会 JCCA2018 (仙台国際センター、仙台市)において、確率論的手法とジェネリック構造の関係について研究発表を行った。その後、Hrushovski 擬平面を改良して目的としている構造を作るという着想を得て、2018年9月に開催されたモデル理論サマースクール(東海大学山中湖セミナーハウス)、において研究発表を行った。そして、このときの参加者からのコメントを踏まえ、2018年9月に日本数学会総合分科会(岡山大学)において研究発表を行った。真に安定で可算範疇的でないジェネリック構造を作るという中間目標に対して、この時点では証明の一部にギャップがあったが、その後、そのギ

ヤップは解消され、2018年12月に開催されたRIMS研究集会（京都大学数理解析研究所）において

定理2. 真に安定で可算範疇的でないジェネリック構造が存在する

という結果を発表した。この発表の内容をまとめた論文が「A note on strictly stable generic structures」（京都大学数理解析研究所講究録, 2019）である。

(3) 2019年度: 最終年度は、無限ウェイトをもつ安定理論を有限言語において作ることを中間目標に据えた。そこで、この分野に詳しいS. Sudoplatov氏と研究打合せをするために、2019年6月に開催された16th Asian Logic Conference (Nazarbayev University, カザフスタン)に参加した。そこで、中間目標に据えていた理論の構成は、すでにSudoplatov氏によって解決済みであることを知ったが、その構成法はもう少し簡略化できるのではないかと考えた。そして、Sudoplatov氏の例の簡略化について、2019年9月に開催されたモデル理論夏の学校（東海大学セミナーハウス）において発表し、国内モデル理論研究者と研究打合せを行った。さらにまとめた結果を、2019年9月に開催された日本数学会秋季総合分科会（金沢大学）において発表した。一方、6月の16th Asian Logic Conferenceで、S. Morozov氏が提示した問題について、ジェネリック構成法を使えば解決できるのではないかと考えた。そこで、その集会の間にMorozov氏と何度か議論をした内容を結果にまとめ、2019年10月に組合せ論モデル理論セミナー（神戸大学六甲台第2キャンパス）において発表し、神戸大学の桔梗宏孝氏に意見を求めた。その結果を、2019年12月に開催されたRIMS共同研究「モデル理論における独立概念と次元の研究」（京都大学数理解析研究所）において発表し、国内外のモデル理論研究者と研究打合せを行った。そして

定理3. ホログラフィックであるが可算範疇的でない構造が存在する。

定理4. 1-basedかつホログラフィックな安定理論は可算範疇的。

という結果が得られた。この結果は論文「On weakly oligomorphic structures」（京都大学数理解析研究所講究録）に掲載予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Koichiro Ikeda	4. 巻 -
2. 論文標題 On stable theories with a special type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 14th & 15th Asian Logic Conference Proceedings, World Scientific	6. 最初と最後の頁 168-174
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koichiro Ikeda	4. 巻 2079
2. 論文標題 Small stable theories with the tree property	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 13-20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koichiro Ikeda	4. 巻 2084
2. 論文標題 On small theories with a special type	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 10-20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koichiro Ikeda	4. 巻 2119
2. 論文標題 A note on strictly stable generic structures	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 17-22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計13件(うち招待講演 3件/うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Koichiro Ikeda
2. 発表標題 On weak oligomorphic structures
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「モデル理論における独立概念と次元の研究」(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田宏一郎
2. 発表標題 On weakly oligomorphic graphs
3. 学会等名 組合せ論・モデル理論セミナー, 神戸大学六甲台第2キャンパス(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田宏一郎
2. 発表標題 ジェネリック構造の超安定性について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会, 金沢大学角間キャンパス
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 池田宏一郎
2. 発表標題 Sudoplatov's examples
3. 学会等名 モデル理論夏の学校, 東海大学セミナーハウス
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Koichiro Ikeda
2. 発表標題 On strictly stable generic structures
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「モデル理論における独立概念と次元の研究」(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 池田宏一郎
2. 発表標題 真に安定なジェネリック構造について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 池田宏一郎
2. 発表標題 Some variant of Hrushovski's pseudoplane
3. 学会等名 モデル理論サマースクール
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Koichiro Ikeda
2. 発表標題 On a Fraisse-style construction of a countable universal homogeneous graph
3. 学会等名 JCCA2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Koichiro Ikeda
2. 発表標題 On stable theories with a special type
3. 学会等名 RIMS研究集会「モデル理論における独立概念と次元の研究」(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 池田宏一郎
2. 発表標題 Ehrenfeucht理論に関する注意
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Koichiro Ikeda
2. 発表標題 A note on small stable theories
3. 学会等名 Logic colloquium 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Koichiro Ikeda
2. 発表標題 On generic structures with a special type
3. 学会等名 15th Asian Logic Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Koichiro Ikeda
2. 発表標題 A remark on small stable theories
3. 学会等名 Model theory workshop in Shanghai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----