様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ７ 月　 ７ 日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ０５３５１

研究課題名（和文）単調正規空間とD-空間の問題に関する定常集合による集合論的考察

研究課題名（英文）The set-theoretical study of monotone normality and D-spaces in terms of stationary sets

研究代表者
矢島　幸信（Yajima, Yukinobu）

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：１０１４２５４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：位相空間 X の部分空間 A が C-埋込(C*-)埋込とは、A 上の任意の（有界）連続関数が X 全体に拡張できるとき。
N を無限可算離散空間とする。最小非可算濃度の個数の N による積空間を S とする。連続体仮設の否定のもとで、S の任意の部分空間がC*-埋込ならば、C-埋込となることを証明した。これは2014年に連続体仮設の下で否定されていた。次に、連続体濃度の個数の N による積空間を T とする。D を T の C*-埋込可能な離散部分空間とするとき、連続体仮設のもとでは D は可算となり、そうでないときは D が非可算となりうることを証明した。すべて予想外の結果と言える。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ほとんどの人は「数学の答えはただ一つ」と信じている。実際にゲーデルが数学的にそれを否定するまでは、すべての人がそのように信じていた。現代では、異なる公理系によって、相反する答えがともに正しいことがありうることは理解されている。
我々の研究成果は「非可算個からなる自然数の積空間における部分集合上の有界連続関数」という数学者ならば誰でも理解できる課題を扱っている。その関数が積空間全体に拡張できるような場合において、公理によって相反する結果が証明できるという極めてわかりやすい内容である。それは専門家にとっても意外性のある結果ともいえる。

研究成果の概要（英文）：For a topological space X, a subspace A in X is called C-embedded (C*-embedded) in X if every (bounded) continuous function on A can be extended over X.
Let N be an infinite countable discrete space. Let S be the product of the least uncountable many copies of N. We prove that every C*-embedded subset in S is C-embedded in S, under the negation of Continuum Hypothesis (= CH). It had been already proved in 2014 that this result is not true under CH. Next, let T be the product of the cardinality of continuum many copies of N. Let D be a C*-embedded discrete subset in T. We prove that D must be countable under CH, and that D can be uncountable under some other set-theoretic assumption. All these results seem to be quite unexpected.

研究分野：集合論的位相幾何学

キーワード：無限可算離散空間　積空間　連続関数　有界　最小非可算濃度　連続体濃度　連続体仮設

１．研究開始当初の背景

（1）集合論的位相幾何学の研究の流行としては，2000 年代に入ってから単調正規空間，D−空間および位相群などが挙げられる。代表者は単調正規空間の研究では，それを一つのファクターにもつ積空間の考察という独自の観点から研究を進めてきた。その結果，下記の論文 4 編 [1, 2, 3, 5] を発表して，総ページ数は 87 ページと予想以上の成果を上げてきた。単調正規空間について評価の高いサーベイでも論文 [3] が参考文献に取り上げられている。この研究は「我々の独壇場であった」と言っても過言ではないであろう。

（2）D−空間についても積空間の観点から考察して，Arhangel'ski の問題のひとつを解くことができた。ちなみに彼は 2000 年代初期に D−空間研究に火をつけた世界の指導的数学者である。それだけに，我々の論文 [4] に対する注目度も高く，そのダウンロード数は我々の他の論文と比べて群を抜いていた。しかし，2014 年ごろから代表者が数学啓蒙の仕事に集中することによって，この研究自体を中断せざるを得なくなった。

（3）2016 年頃から数学啓蒙の仕事も軌道に乗り始めたので，研究に戻ることになった。当然ながら，注目度も高い D−空間の研究を続けるのが，通常の考え方である。しかし，それゆえに競争も厳しく，2 年近くの研究のブランクは，予想以上に影響が大きかった。つまり，D−空間の研究の方向性が見えてこないのである。

２．研究の目的

方向が見えない研究は，とても辛いものがある。その状況は別の研究に移ることへの示唆と感じた。そこで，本研究課題名の後半部分の「定常集合による集合論的考察」の対象を，単調正規空間や D−空間から，順序数の２つの部分空間 A, B による積空間 $A\times B$ に変更することとした。今後は簡単のため, この $A\times B$ を順序数の積空間という。$A\times B$ の研究はその正規性について，日本人 3 人により 1990 年頃に始められた。それとは別に，積空間の正規性に関係して，「C*−埋込=C−埋込」問題が提起されて，距離空間をファクターにもつ積空間 $X\times Y$ において，日本を中心に長い間研究されてきた。しかし，順序数による積空間 $A\times B$ の「C*−埋込=C−埋込」については，今まで誰も手を付けていなかった。そこで,「C*−埋込=C−埋込」問題を色々な積空間で議論することに，研究目的の方向を転換することにした。この研究では A, Bにおける定常集合が考察の対象となってくる。

３．研究の方法

（1）C−埋込ならば C*−埋込は明らかである。そこで，順序数の積空間 $A\times B$ において，任意の閉集合が C*−埋込ならば C−埋込となるかを考える。まずは成り立つための条件を考えると,「$A\times B$が長方形的」という条件がすぐに浮かぶ。複雑であるが，$A\times B$ の位相構造を具体的に分類できるからである。それゆえに場合分けが極めて多く面倒ではあるが，それぞれの場合は具体的である。それゆえに，考察を愚直に進めていけば，結果は出てくると判断した。その後で「$A\times B$ が長方形的でない」場合を考えればよい。

（2）「C*−埋込=C−埋込」問題を無限積空間で議論することも，誰も手を付けていないことに気が付いた。コンパクトでない位相空間で最も簡単なものは，可算離散空間 N（自然数全体に離散位相を導入したもの）である。この研究における本質的な問題は，最小非可算濃度 ω_1の個数のN による積空間 N^{ω_1}において，「C*−埋込=C−埋込が成り立つか？」である。上記の Arhangel'ski の問題では,「N^{ω_1}は D−空間でない」を示して否定的解決を与えた。その意味では N^{ω_1}の位相構造の研究には，一歩先んじているので，この問題を研究することは自然である。

４．研究成果

（1）順序数の積空間 $A\times B$ が長方形的（⇔可算パラコンパクト）であるとき，その任意の閉集合が C*−埋込ならば C−埋込となることは，直線的な方向で証明できた。そうでない場合は，証明に本質的なギャップがあった。それを同僚の平田康史氏がきれいに埋めてくれて，

「順序数の積空間 $A\times B$ の任意の閉集合は，C*−埋込ならば C−埋込となる」

という結果を証明できた。それは論文 [6] として，すでに出版済みである。

（2）2014 年に Pol 夫妻の論文 [9] によって，

「N^{2^ω}においては,『C*−埋込≠C−埋込』である可算離散閉集合が存在する」

ことが証明されていた。従って，連続体仮説 $2^\omega=\omega_1$のもとでは，我々の予想「N^{ω_1}において，閉集合では C*−埋込=C−埋込が成り立つ」は完全に否定される。ところが，代表者が研究を中断していた頃だったので，この結果を見落としていた。それが偶然にも功を奏して，平田康史氏の協力のもと 2017 年に

「連続体仮説の否定とマーチンの公理のもとで,

『N^{ω_1}の任意の部分集合は C*−埋込ならば C−埋込となる』」

を証明できた。もし論文 [9] を知っていたら，この定理は生まれなかっただろう。それだけに極

めて予想外の結果であり幸運でもあった。Polはじめ多くの研究者に興味を持ってもらえた。この結果は論文 [8] にまとめた。掲載決定はかなり前であるが，出版までにかなり時間がかかっている。それでも近々出版されるはずである。

（3）上記の Pol 夫妻の結果を見ているうちに，その中の「可算」に着目して，

「N^{2^ω}においては，C*−埋込な離散閉集合で非可算なものは存在するか？」

という疑問が生じた。この問題は次のように実にきれいな形

「N^{2^ω}において C*−埋込な離散非可算（閉）集合が存在するための必要十分条件は，
濃度の等式 $2^{\omega_1}=2^\omega$ が成り立つことである」

を証明して完全に解決された。これによって

「連続体仮説のもとでは，N^{2^ω}において任意の C*−埋込な離散集合は可算となる」

わけで，このような集合の濃度は集合論的に決定できないという予想外の結果となった。この研究は Web 上で論文 [7] の形で先行発表された。近々雑誌の形で出版される。

（4）順序数の積空間 $A\times B$を考察するとき，それは長方形的（可算パラコンパクト）かどうかが重要である。なぜなら，$A\times B$の位相構造をかなり具体的に場合分けできるからである。ただし，その場合分けは複雑すぎるきらいがある。そこで，その位相構造を考えているうちに，基数関数 extent(e で表す)によって，次のように特徴付けることが分かった：

「弱到達不可能基数は存在しないという仮定のもとで，
順序数の積空間 $A\times B$が長方形的（可算パラコンパクト）であるための必要十分条件は，
e(A×B)=e(A)・e(B)が成り立つことである」。

この集合論的な仮定は，無矛盾であることは証明されてはいない。しかし，その周りの状況から見て，ほぼ無矛盾であると考えられている。従ってこの結果によって，ほぼすべての場合において積空間 $A\times B$が長方形的か否かの判定が極めて容易になった。一方，弱到達不可能基数は存在すると仮定すると，簡単な反例が見つかる。この結果は論文として某専門誌に投稿しており，現在は審査中である。

（5）以上を多少まとめてみたい。上記の（2）と（3）で扱った問題では，相反する結果がともに正しい，すなわち集合論的に独立であるという結論に終わった。上記（4）の結果は，完全に集合論的に独立であるとまでは言えないが，極めてそれに近い結果と言える。いずれにしても，これらすべての結果は著者自身にとっても極めて予想外の結果であった。そして，その予想外こそがこの研究の醍醐味であるともいえる。

＜引用文献＞

[1] Y.Yajima, Normality of products of monotonically normal spaces with compact spaces, Topology and its Appl. 158 (2011), 2085-2089.

[2] Y.Yajima, Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games, Topology and its Appl. 159 (2012), 1223-1235.

[3] Y.Hirata, N.Kemoto and Y.Yajima, Products of monotonically normal spaces with various special factors, Topology and its Appl. 164 (2014), 45-86.

[4] Y.Hirata and Y.Yajima, On the D-property of certain products, Topology and its Appl. 195 (2015), 297-311.

[5] Y.Hirata and Y.Yajima, Separation of diagonal in monotonically normal spaces and their products, Topology and its Appl. 196 (2015), 1033-1059.

[6] Y.Hirata and Y.Yajima, C*-embedding implies P-embedding in products of ordinals, Topology and its Appl. 231 (2017), 251-265.

[7] Y.Hirata and Y.Yajima, Undecidability of the cardinality of C*-embedded discrete subsets in products of natural numbers, Topology Proc. 56 (2020), 85-95.

[8] Y.Hirata and Y.Yajima, C*-, C- and P-embedded subsets in products and undecidability of a certain property of N^{ω_1}, Topology and its Appl. (to appear).

[9] E.Pol and R.Pol, Note on countable closed discrete sets in products of natural numbers, Topology and its Appl. 175 (2014), 65-71.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

１．著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	４．巻 －
２．論文標題 C*-, C- and P-embedded subsets in products and undecidability of certain property of N^{\omega_1}	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Topology and its Applications	６．最初と最後の頁 －
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	４．巻 56
２．論文標題 Undecidability of the cardinality of C*-embedded discrete subsets in products of natural numbers	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Topology Proceecdings	６．最初と最後の頁 85-95
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima	４．巻 231
２．論文標題 C*-embedding implies P-embedding in products of ordinals	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Topology and its Applications	６．最初と最後の頁 251-165
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2017.09.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 矢島　幸信，平田　康史
２．発表標題 A characterization of certain products of ordinals and weakly inaccessible cardinals
３．学会等名 2019年度日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2019年

1．発表者名 矢島　幸信，平田　康史
2．発表標題 順序数による長方形的積空間のある基数関数による特性化について
3．学会等名 一般位相幾何学の発展と諸分野との連携（RIMS共同研究）
4．発表年 2019年

1．発表者名 矢島　幸信
2．発表標題 On C*-embedded and C-embedded subsets in Σ-products
3．学会等名 2018年度General Topologyシンポジウム
4．発表年 2018年

1．発表者名 矢島　幸信，平田　康史
2．発表標題 Undecidability of the cardinality of C*-embedded discrete subsets in products of natural numbers
3．学会等名 2018年度日本数学会秋季総合分科会
4．発表年 2018年

1．発表者名 矢島　幸信，平田　康史
2．発表標題 自然数の積空間におけるC*-埋込みされた離散な部分集合の濃度の決定不可能性について
3．学会等名 RIMS研究集会「一般位相幾何学の進展と諸問題」
4．発表年 2018年

1．発表者名
Yukinobu Yajima

2．発表標題
Undecidability of the existence of C*-embedded but not C-embedded subsets in a product of natural numbers

3．学会等名
Special conference of set-theoretic topology (held at Auburn in USA)（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

1．発表者名
平田　康史，矢島　幸信

2．発表標題
可算離散空間の積へのC*-，C- および P-埋め込み

3．学会等名
集合論的・幾何学的トポロジーの動向と諸分野との連携（RIMS共同研究）

4．発表年
2017年

1．発表者名
矢島　幸信，平田　康史

2．発表標題
Undecidability of the existence of C*-embedded but not C-embedded subsets in a product of natural numbers

3．学会等名
日本数学会春季総合分科会

4．発表年
2017年

1．発表者名
矢島　幸信，平田　康史

2．発表標題
Three embeddings and their implications in products of generalized metric spaces

3．学会等名
日本数学会春季総合分科会

4．発表年
2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

ー

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	平田　康史 (Hirata Yasushi) (70375400)	神奈川大学・工学部　数学教室・特任准教授 (32702)	