

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 5 月 26 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05374

研究課題名（和文）再生核理論を用いたソボレフ不等式研究の深化と応用

研究課題名（英文）Deepening and application of Sobolev inequality studies using reproducing kernel theory

研究代表者

武村 一雄（TAKEMURA, Kazuo）

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：60367216

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：ソボレフ不等式における代表的な結果としては、1次元L2ソボレフ型不等式の結果を拡張させてLpソボレフ型不等式へと拡張させることに成功したことである。また、離散ソボレフ不等式においては、C60フラレンに対する異性体1812個に対して最良定数を求めたことである。離散ソボレフ不等式的最良評価は結晶構造を持つ物質の物理的特性と結びついていることが分かった。特に、その最良定数は対象としている力学モデルの剛性を表す指標と考えられ、最良定数が小さければ小さいほど、対象となる物質はより硬いことになる。得られた結果は、1812個の異性体の中でバッキーボールが最も硬いことを示す証左資料となった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究成果の中でも特に、離散ソボレフ不等式をC60フラレンに対する異性体1812個に対して適用して得られた結果は数理的な問題を現実の物質に適用することで、物質の特徴付けを行うことができたという点において、学術的に意義がある。こうして得られた知見は、工学的にも応用が可能であることから、社会的意義も同時に兼ね備えている。本研究成果は結晶構造を持つ物質を対象として、それらの剛性を調べることが可能であることから、今後、工学分野へ波及効果をもたらすものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：A representative result in Sobolev inequalities is the successful extension of the results for one-dimensional L2 Sobolev-type inequalities to Lp Sobolev-type inequalities. In the discrete Sobolev inequality, the best constants were obtained for 1812 isomers of C60 fullerene. The best estimate of the discrete Sobolev inequality was found to be related to the physical properties of materials with crystal structures. In particular, the best constant is considered to be an indicator of the stiffness of the mechanical model under consideration; the smaller the best-constant, the stiffer the material under consideration. The results obtained provide evidence that buckyball is the stiffest of the 1812 isomers.

研究分野：微分方程式

キーワード：グリーン関数 ソボレフ不等式 最良定数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ソボレフの埋め込み: $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$), ソボレフ不等式: $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$) は現代的微分方程式論の中核をなす不等式である。しかし, その一方で, 次の問題を残した。

(問題) ソボレフ不等式における定数 C の最小値 C_0 (最良定数) を求めよ。次に, C を C_0 で置き換えたとき, 等号を達成する関数 $u(x)$ (最良関数) を求めよ。

上の問題は特殊な場合 ($\Omega = \mathbb{R}^N$, $q = Np/(N - mp)$) について, 1930 年に G. Bliss が $\Omega = \mathbb{R}$, $q = p/(1 - mp)$ について, 1976 年に G. Talenti と T. Aubin が独立に最良定数を求めて以来, ほとんどが未解決であった。本研究では, $N \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $p = 2$, $q = \infty$ を中心に, この問題の解決を目指す。

2. 研究の目的

(1) 「常微分方程式のグリーン関数とソボレフ不等式の研究」は, これまでの研究によりかなり進んだが, 今なお興味深い未解決の問題を多く含む。特に, L^p 型ソボレフ不等式の最良評価, 特に, $p = 2$ から $p > 1$ の場合への拡張に取り組む。また, 最近, 最良定数が境界値問題に対する解の存在定理の証明で重要な役割を果たすことが分かったため, ソボレフ不等式の最良評価を解の存在定理へ応用する。「偏微分方程式のグリーン関数とソボレフ不等式」は, ソボレフ不等式の高次元化について, 重調和作用素や高階熱作用素に対する各種境界値問題の設定とグリーン関数の構成, ならびに, グリーン関数の再生核構造と対応するソボレフ不等式の最良評価を明らかにする。

(2) (1) の研究と並行して, ソボレフ不等式の離散化と最良定数計算を進め, 各種有限グラフ上の離散ソボレフ不等式の最良評価, 特に, 切頂 20 面体 (C_{60} フラーレン) 上の離散ソボレフ不等式と最良定数の材料科学的意味付けを行う。また, 各種常微分方程式の境界値問題のグリーン関数を記述する特殊関数の離散化, 離散特殊関数の満たす等式や不等式の導出を明らかにする。

3. 研究の方法

本研究グループは, これまで基礎工学の分野に登場する常(偏)微分方程式の各種境界値問題, 具体的には弾性体のたわみ問題や高階熱作用素の境界値問題に対するグリーン関数を具体的に求めてきた。グリーン関数 $G(x, y)$ はヒルベルト空間 H , 内積 $(\cdot, \cdot)_H$ を適切に定めると, H の再生核であり, 再生等式が成立する。この再生等式からソボレフ不等式を導出し, 最良評価を行う。また, 並行して, ソボレフ不等式の離散化に着手する。各種差分作用素の境界値問題から, 離散グリーン関数(以後グリーン行列と呼ぶ)を導出する。グリーン行列は階差行列の逆行列またはペンローズムーア一般化逆行列に対応し, ヒルベルト空間を適切に設定すると, 再生核行列となる。この一連の手続きを用いて, 各種有限グラフ上の離散ソボレフ不等式の最良評価を行う。

4. 研究成果

(1) 研究計画初年度の平成 29 年度は, 連続版ソボレフ不等式の最良評価(最良定数, 最良関数計算)と並行して進めている離散版ソボレフ不等式の最良評価に対するデータを再生核理論の立場から整理し直した。特に, 最良定数に対するデータの整理作業から最良定数の新たな表現形式を得ることができた。また, 新たに得られた表現形式を用いることにより, 最良定数に対する階層構造が副産物として得られた。具体的には, 重み付き完全グラフ上に一般化されたグラフラプラシアンを定義することにより 2 種類の離散ソボレフ不等式を導出, それぞれの不等式に対応した最良評価が得られた。最良定数 $C_0(n; a)$ と $C_0(n)$, いずれの場合もグリーン行列あるいは擬グリーン行列を用いて計算された。これまで離散版ソボレフ不等式に対する最良定数は特性根を用いた調和平均の逆数という形式が主な表現形式であったが, 特性方程式の展開係数による表現形式および n 個の特性根を用いた基本対称式による表現形式が新たに得られた。本研究成果はこれまでの最良評価, 特に最良定数の表現形式を拡張させるものである。また, こうした種々の表現形式を利用することにより, 最良定数に対する階層構造という新たな結果を導き出すことができた。ある制約条件のもとで, 最良定数 $C_0(n; a)$ は n に対して単調減少となり, $C_0(n)$ は n に対して単調増加と逆の構造をもつことが解明された。

(2) 研究計画 2 年目にあたる平成 30 年度は, 常(偏)微分方程式のグリーン関数を利用した連続版ソボレフ不等式の最良評価(最良定数, 最良関数計算)と並行して進めている離散版ソボレフ不等式に登場するグリーン行列のデータを再生核理論の立場から整理し直した。また, 正多面体グラフ, 切頂正多面体, C_{60} フラーレンとメビウスの梯子など, これまでに得られた様々な有限グラフ上の離散ソボレフ不等式に対する最良評価を拡張することができた。本研究成果は 2 つの意味で従来の研究成果の拡張になっている。1 つ目は, 離散ラプラシアンが定義されているグラフに対する次元の拡張である。特に, $M \times N$ 頂点をもつ周期的な長方形は, メビウスの梯子の拡張版にあたる。2 つ目は, これまでの離散ラプラシアンを自然数のべきをもつ新たな離散ラ

ブラシアンに定義し直したことである。すなわち、周期的な長方形上に多重離散ラブラシアンを導入したことが2つ目の拡張点として挙げられる。多重離散ラブラシアン固有値、多重離散ラブラシアンに対するグリーン行列・擬グリーン行列を詳細に調べることにより、2種類の離散版ソボレフ不等式を導出することができた。また、2種類の離散版ソボレフ不等式に対して、再生核(グリーン行列、擬グリーン行列)の性質を使い、それぞれのソボレフ不等式における最良定数及び最良関数を得ることができた。特に、最良定数 $C_0(M, N, n; a)$ において、 M と N を無限大に近づけた際の上限と下限を求め、これらの極限值がガウスの超幾何関数の特殊値として表現される事実を発見した。

(3) 研究計画3年目に当たる令和元年度(平成31年度)は、前年度に引き続き、離散版ソボレフ不等式的最良評価(最良定数、最良関数計算)と並行して進められてきた常(偏)微分方程式の各種境界値問題に対するグリーン関数を、再生核理論の立場から改めて整理し直した。こうしたグリーン関数の取りまとめ作業により、従来、得られていたあるソボレフ型不等式的最良評価の拡張に成功した。主な研究成果は、「1次元 L^p ソボレフ型不等式的最良評価」を得られたことである。本研究成果は、先行研究として2007年から2012年の間に、当該研究グループにより得られた最良評価についてのさまざまな知見に基づいたものである。これらの成果の中でも、特に2007年に発表された「 $(-1)^M (d/dx)^{2M}$ に対する周期境界値問題に対応する L^p ソボレフ不等式的最良定数」、2012年に発表された「ヘビサイド・トムソンケーブルに対する周期境界値問題のソボレフ型不等式」の研究成果を直接的な礎としている。具体的には、これまでに、すでに得られていた周期境界条件のもとでの L^2 ソボレフ型不等式の結果を、境界条件は異なるが、1次元 L^p ソボレフ型不等式へと拡張される結果となっている。ソボレフ型不等式の背景にある微分方程式としては、全固有値が負に分布している n 次元フルビッツ型多項式の微分作用素をもつ線形常微分方程式に対する境界値問題を問題として設定した。こうして設定された境界値問題に対して、はじめに解を導出した。さらに、導出された解の公式に対して、ヘルダーの不等式を適用することにより、ソボレフ型不等式が導出される。導出されたソボレフ型不等式的最良定数は、グリーン関数の L^p ノルムに等しくなり、同時に、最良関数の原点での値に対する p 乗根と等しくなることも合わせて発見された。

(4) 本研究計画4年目にあたる令和2年度は、多角形、多面体および切頂多面体など、これまで蓄積されてきた各種離散ソボレフ不等式に対する最良評価(最良定数、最良関数計算)のデータを再生核理論の立場から再整理した。こうした整理から、頂点数が同じ有限グラフの仲間同士に対する最良定数の比較を行うことにより、それら最良定数の大小関係が各有限グラフの「たわみにくさ」、すなわち、「硬さ」に結びつくことが分かった。これは離散ソボレフ不等式が、各頂点における定常状態からの変位に対する絶対値の最大値の2乗を、上からポテンシャルエネルギーの定数倍で評価する不等式となっているためである。関連する主な研究実績は、「 C_{60} フラレンにおける1812個の異性体に対する離散ソボレフ不等式的最良定数」である。本研究において、対象となる異性体は各辺に一樣なバネ定数を持つ線形パネの古典力学モデルとしてとらえ、離散ソボレフ不等式的最良評価を行った。1990年代には、スパイラルアルゴリズム、吉田・大澤アルゴリズムやプリンクマン・ドレスアルゴリズム(パッチステッチ法)など、異なるフラレンを列挙するアルゴリズムが提案されてきたが、本研究ではパッチステッチ法を用いて C_{60} フラレンの異性体を列挙し、1812個の異性体をすべて取得した。また、これらに対応する離散ソボレフ不等式的最良定数をすべて計算し、バッキーボールの最良定数が最も小さいことを証明した。

近年の我々の研究結果から、離散ソボレフ不等式的最良評価は結晶構造を持つ物質の物理的特性と結びついていることが分かってきた。特に、最良定数はこれら力学モデルの剛性を表す指標と考えられ、最良定数が小さければ小さいほど、対象となる物質はより硬いということになる。したがって、本研究結果は C_{60} フラレンにおける1812個の異性体の中でバッキーボールが最も剛性が高いことを示す証左資料となった。

(5) 本研究課題最終年度にあたる令和3年度の主な研究成果は、糸のたわみ問題に対応する重み付きソボレフ不等式を導出し、その最良定数を求めたことである。これまで当該研究課題において求められてきたソボレフ不等式的最良評価(最良定数、最良関数計算)は、局所的な境界条件をもつ微分方程式に対するグリーン関数を利用することで求められた。ソボレフ不等式の背景にある微分方程式の境界条件に非局所な周期境界条件を課すことで、重み付けされたソボレフ不等式を導出することができた。現在、本研究成果を足がかりにして、高階微分作用素に対応する重み付けされたソボレフ不等式的最良評価に拡張された問題を考え、一定の成果を得ている。「 L^p 型ソボレフ不等式的最良評価への拡張」、「 C_{60} フラレンに対応するソボレフ不等式」や「各種グラフ上の離散ソボレフ不等式」の最良評価を求めるなど、研究期間全体を通じて交付申請書に記載された研究実施計画はほぼ実現できた。特に、「 C_{60} フラレンに対応するソボレフ不等式」については、炭素原子を頂点とみなした多面体に対する離散ソボレフ不等式的最良定数を求めた。こうして得られた最良定数を利用し、異性体それぞれに応じた値を実際に計算することで、最も硬い異性体を求めることができた。本研究成果は、離散ソボレフ不等式が物質の特徴付けに貢献することができた事例として挙げられ、その意義は大きいと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kametaka Yoshinori, Watanabe Kohtarō, Nagai Atsushi, Takemura Kazuo, Yamagishi Hiroyuki, Sekido Hiroto	4. 巻 12
2. 論文標題 The best constant of discrete Sobolev inequality on 1812 C60 fullerene isomers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 49 ~ 52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.12.49	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kazuo Takemura and Yoshinori Kametaka	4. 巻 8
2. 論文標題 Evaluation of the One-Dimensional L_p Sobolev Type Inequality	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/math8020296	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kazuo Takemura and Yoshinori Kametaka	4. 巻 112
2. 論文標題 Sharp Constants of Discrete Sobolev Inequalities on a Cyclic Rectangular Lattice	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)	6. 最初と最後の頁 175 - 194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.17654/MS112020175	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kazuo Takemura, Yoshinori Kametaka and Atsushi Nagai	4. 巻 10
2. 論文標題 A Hierarchical Structure for the Sharp Constants of Discrete Sobolev Inequalities on a Weighted Complete Graph	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Symmetry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/sym10010001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	亀高 惟倫 (KAMETAKA Yoshinori) (00047218)	大阪大学・その他部局等・名誉教授 (14401)	
研究 分 担 者	山岸 弘幸 (YAMAGISHI Hiroyuki) (10448053)	東京都立産業技術高等専門学校・ものづくり工学科・准教授 (52605)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------