

令和 5 年 6 月 29 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05375

研究課題名(和文)多重安定振動系の制御と数理

研究課題名(英文)Controlling multi-stable oscillatory system using mathematical structure

研究代表者

小川 知之(Ogawa, Toshiyuki)

明治大学・総合数理学部・専任教授

研究者番号：80211811

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：振動場反応拡散系の解構造とダイナミクスを明らかにし、実験と理論の融合を目指した。BZ反応を用いた光感受性のフィードバック系を考察し、光刺激による振動制御実験系の構築を行った。それに対応する光制御付きオレゴネーターモデルを用いて振動子の拡散結合系の分岐解析を行い、倍周期分岐とリコネクション現象を確認した。拡散とフィードバックの競合により系の状態を制御する可能性を示し、実際に実験系でも対応する制御が可能であることを示した。さらに精細管に現れる振動パターンの安定性を解析した。これらは、メトリックグラフ上のパターンダイナミクスや大規模結合振動子系に現れるキメラ振動の研究などに道を開きつつある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的意義は、振動場反応拡散系の解構造とダイナミクスを解明し、理論と実験を融合させることである。大域フィードバックを利用した解析手法の提案や系の豊富な解構造が明らかになり、振動パターンの制御に向けた新たな手法の展開に寄与した。そのほか、生理学や生態学に現れる様々な振動パターンの解明を行っており、本研究課題で得られた手法は、複雑な系の理解に貢献するものと言える。

研究成果の概要(英文)：This study aims to clarify the solution structure and dynamics of oscillatory reaction-diffusion systems and to integrate experimental and theoretical studies. A light-sensitive feedback system using the BZ chemical reaction is considered, and corresponding experimental systems are constructed. Bifurcation analysis of the diffusion coupling of oscillators was performed using the corresponding optically controlled Oregonator model, and period-doubling bifurcation and reconnection phenomena were confirmed. We showed the possibility of controlling the state of the system by the competition between diffusion and feedback, and showed that the corresponding control is actually possible in the experimental system. Furthermore, we analyzed the stability of the vibration patterns appearing in the seminiferous tubules. These are paving the way for the study of pattern dynamics on metric graphs and chimera oscillations appearing in large-scale coupled oscillator systems.

研究分野：応用数学

キーワード：反応拡散系 BZ化学反応 パターンの制御 大域フィードバック リコネクション 進行波解

### 1. 研究開始当初の背景

反応拡散方程式系の解析的研究は散逸を伴う生物系、生態系、化学反応系に現われる様々な非線形現象において生じる自己組織化空間構造(いわゆるパターン形成)の理解に多大な貢献をしてきた。また、拡散という現象の普遍性から、反応拡散系は様々な非線形現象の第1次近似的な数学モデルになり、他分野との共同研究の過程でその数学的構造も豊かになってきたといえよう。例えば Turing 不安定化の分岐解析による種々の定常解の分岐、特異極限法による定常解・進行波解の構成・安定性理論、特異極限法から自由境界問題の導出またその解析、スポット解の相互作用解析などが挙げられる。このように元のダイナミクスが常微分方程式系の意味で漸近安定な平衡点をもつ場合の解析は進んでいるが、一方で、振動ダイナミクスの拡散結合系の振る舞いには数学的に未知の部分が多い。実際、A. Mikhailov, K. Showalter による化学反応系の多種多様な振る舞いの解説 (Physics Reports 425, 79-194, 2006) を見れば、BZ 反応だけでなくプラチナ表面触媒反応に見られる螺旋波(スパイラル)、同心円、スポット進行波、定在波が織りなす時空カオスパターンなど多種多様であることがわかる。数学的な理解が一部を除いてまだまだ追いついていないことが明らかである。他にも脊椎動物の精細管で見られる精子形成の分化段階における動的な時空間的波動パターンなども振動パターンの1種であるが、マウスで観察される垂直型進行波とヒトで観察されるらせん型進行波の違いのメカニズムは未知であった。

### 2. 研究の目的

振動場反応拡散系の豊富な解構造と複雑なダイナミクスを解きほぐし、多彩さの必然性を明らかにすることを目指した。その際、(1)BZ 反応などの振動場化学反応系では大域フィードバックを利用し、対応するフィードバックシステムを構築し、理論と実験の融合研究を行うのが本研究課題の目標の一つである。その他にも並行して以下のような関連する問題も解析する。(2)精細管のような細いチューブ上領域、もしくは1次元領域での振動場反応拡散系の挙動を解析する。特に垂直型とらせん型の進行波の安定性、1次元領域では位相速度の異なるセグメントパターンの解明を目指した。(3)精細管は一般に枝分かれ(ジャンクション)を持つので、コンパクトメトリックグラフ上のパターンダイナミクスに注目する。コンパクトメトリックグラフには、2つまたは3つの有限区間から構成される8種類のグラフがあるので、そこでのパターンダイナミクスを解明する。(4)結合振動子系モデルの中で見られるキメラ状態と呼ばれるコヒーレントな領域とインコヒーレントな領域が共存する状態の解析を行う。これはてんかん発作やパーキンソン病・統合失調症といった神経系の疾患に関わりがあるとされており、多数の振動子集団に非局所的な結合を加えることによりキメラ状態が出現する。本研究では Stuart-Landau 型の結合振動子集団において、進行波振動モードの安定性と大域結合との関連を調べる。

### 3. 研究の方法

振動場化学反応として知られる BZ 反応を用いてフィードバック系を考察する上で、光感受性という性質が知られている。BZ 反応は、ルテニウムという金属触媒を用いる事で、強い光刺激に反応する。光照射の結果、振動が抑えられたり、興奮場では化学進行波が消滅するといった現象が観察できる。そこで、(1)BZ 化学反応の光制御付き3変数オレゴネーターモデルを用いて2つの振動子の拡散結合系を考える。2つの振動子の興奮因子の値の平均を光刺激としてフィードバックするという、大域結合を導入し、大域結合強度と拡散係数を分岐パラメータとして周期解の分岐追跡を行った。分岐追跡は AUTO というパッケージを利用し、小川と研究協力者の中央大学の 大野航太氏が行った。実験系の構築は分担者の末松の協力を得て大野航太氏の実現し、実験観測は大野航太氏が行った。数値計算と理論的部分のディスカッションはオンライン中心に行ったが、実験観測は明治大学内で行った。そのため研究期間前半に2振動子系の構築を行い成果を出せたが、後半の3年間で3振動子以上の実験系の準備はしたものの構築ができず課題が残った。その他の関連課題は以下のように進めた。(2)精細管内の振動パターンの解明は、九州大学の三浦岳氏のグループとの共同研究で、3種反応拡散モデルを用いて、生体内で観察されるウェーブトレインパターンを再現した。マウスのパターンの波長はヒトのそれよりも大きいと仮定し、数値シミュレーションを行った。主に数値計算による研究なので定期的にオンラインディスカッションをしながら進めた。(3)コンパクトメトリックグラフのパターンダイナミクスは、まず足掛かりとして2つまたは3つの有限区間から構成される8種類のグラフに限定して、数値計算するアルゴリズムを作り、さらにそれぞれのグラフ上での固有関数を具体的に計算することによって分岐解析を進めた。これは九州大学の小林俊介氏との共同研究で、定期的にオンラインディスカッションをしながら研究を進めた。(4)キメラ振動は、大野航太氏と行っていた大域フィードバックを加えた結合振動子系の分岐解析の中から派生したものである。キメラ振動の起源を調べるため、できるだけ簡潔なモデルから調べるべく Stuart-Landau 型の結

合振動子集団において、進行波振動の安定性と大域結合との関連を調べた。

#### 4. 研究成果

- (1) **BZ 化学反応系のフィードバック制御**: 光感受性のある BZ 反応においては光刺激が主に作用するのは抑制因子に該当する物質だと考えられているが、実験的に定在波が現れることが知られている。この定在波を説明するために、BZ 振動の結合振動子系モデルに単純化して、逆相同期の発生起源を明らかにしてきた。そこでは、同位相振動、反位相振動、交互振動などの特徴的な解が現れることがわかり、これらの詳細な分岐構造の数値的追跡を分岐計算パッケージの AUTO を用いて行った。同相同期と逆相同期の 2 つの分岐枝がお互いに繋ぎ変えを起こすリコネクションが拡散とフィードバックの競合により現れる事が分かった。このリコネクションによって、同相同期と逆相同期の双安定な領域がパラメータに依存して変化する事が確認された。また、BZ 反応を用いた結合振動子系の実験システムはいくつか報告されているが、溶液同士が液交換により結合する系を用いて実験システムの構築を試みた。その結果、数理モデルで得られた結果を実験においても再現した。これらの結果は、研究分担者の末松氏と研究協力者の大野航太氏との共著論文にまとめた。さらに、3 つの結合振動子系の分岐構造に関してシミュレーションも行ない、同相同期と 2 : 1 交互振動のリコネクションが現れることを明らかにした。FitzHugh-Nagumo 系に関しては複数のパラメーターに関しての分岐追跡も行い、2 種類の 2 : 1 交互振動、3 相解の分岐枝を見つけた。
- (2) **精細管に現れる周期振動波**: 3 種反応拡散モデルを用いて、生体内で観察されるウェーブトレインパターンを再現した。マウスのパターンの波長はヒトのそれよりも大きいと仮定し、数値シミュレーションを行った。その結果、垂直型進行波とらせん型進行波頻度の複雑なパターンが得られた。数理モデルによる解析結果から、ヒトの精細管にも少数の垂直パターンが存在するはずだと予測され、実際にヒト精細管の組織学的切片から、理論的予測と一致する垂直パターンを発見した。最後に、先に報告されたヒトのパターンの不規則性は、より広い不安定波数範囲とマウスと比較したヒトの精細管の不規則な形状という 2 つの要因を用いて再現できることを示した。これらの結果は、数理モデリングが生体内の精細管のパターン動態を理解するのに有用であることを示している。
- (3) **メトリックグラフ上のパターン形成**: 近年、ジャンクションのあるメトリックグラフ上の反応拡散方程式の研究が注目されている。コンパクトメトリックグラフには、2 つまたは 3 つの有限区間から構成される 8 種類のグラフがある。これらのコンパクトメトリックグラフ上の反応拡散方程式系を自然な境界条件付きで考え、そこで系がチューリング不安定性あるいはウェーブ不安定性を持つような状況での分岐解析を行った。メトリックグラフを構成する元の区間の長さに比を適切に選択することにより、フーリエ展開を利用できる縮退した状況が得られる。これにより、分岐点周辺の局所分岐構造を決定するための標準形解析が可能になった。
- (4) **キメラ振動と進行波振動の安定性**: 結合振動子系モデルはさまざまな物理現象・生物現象で見られる時空間パターンをよく再現するため、広く用いられてきた。その中で、キメラ状態と呼ばれるコヒーレントな領域とインコヒーレントな領域が共存する状態が報告されているが、これはてんかん発作やパーキンソン病・統合失調症といった神経系の疾患に関わりがあるとされている。また、多数の振動子集団に非局所的な結合を加えると、そのフィードバックの仕方によってキメラ状態が数値的に出現することが報告されており、近年では Omelchenko らのグループが精力的に調査を行っている。しかし、キメラ状態の出現起源まで言及した報告は未だなされていないのが現状である。本研究では Stuart-Landau 型の結合振動子集団において、進行波振動の安定性と大域結合との関連を調べた。キメラ振動は一樣振動が安定な領域と進行波振動が安定な領域の境界部分で飲み観測されることがわかった。

以下 2 件は、本研究課題の振動場反応拡散系と直接的な繋がりはないが、解析手法の観点で類似性があり、同時に得られた成果があるのでここに成果として記しておく。

- (5) **外来種のバッファゾーンへの侵入可能性**: 外来競争種  $W$  が強競争種  $U$  と  $V$  がフロント進行波を形成しているところに侵入しうるかどうかという問題を扱った。3 成分競争拡散系で 3 種が共存するような進行波解の分岐構造を解析した。スペクトル解析と中心多様体還元を組み合わせるにより、以下のことが示される:  $W$  を含まない元々の進行波解は  $W$  の臨界固有成長率で不安定化し、その線形化作用素は 2 種類の縮退を持つことがわかった。3 番

目の外来種の成長速度をパラメーターとして非自明な進行波解が分岐することを示した。また非自明解が元の進行波を加速するのか 減速するのかを分岐点付近で分類することができた。これは、富山大学の池田栄雄氏・北海道大学の栄伸一郎氏たちとの共同研究である。

- (6) 常微分方程式系に対する組合せモーソ分解の計算法: 常微分方程式系に対する組合せモーソ分解アルゴリズムをルンゲクッタ法による数値解法を用い、アフィン近似と QR 分解に基づき構築した。区間算術とは異なり、数学的厳密性を犠牲にすることなく、より低い計算コストでモーソ分解を計算することができた。3次元 ODE の時間 T 写像と 4次元 ODE の 3次元ポアンカレ写像の数値例を示し、既存手法と提案手法の比較を行った。これは連携研究者の宮路智行氏と東京大学博士研究員千葉悠喜氏との共同研究である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Ei Shin-Ichiro, Ikeda Hideo, Ogawa Toshiyuki	4. 巻 448
2. 論文標題 Bifurcation of co-existing traveling wave solutions in a three-component competition diffusion system	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Physica D: Nonlinear Phenomena	6. 最初と最後の頁 133703 ~ 133703
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physd.2023.133703	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Chiba Yuki, Miyaji Tomoyuki, Ogawa Toshiyuki	4. 巻 13
2. 論文標題 Computing Morse decomposition of ODEs via Runge-Kutta method	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 40 ~ 43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.13.40	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kawamura Mari, Sugihara Kei, Takigawa-Imamura Hisako, Ogawa Toshiyuki, Miura Takashi	4. 巻 83
2. 論文標題 Mathematical Modeling of Dynamic Cellular Association Patterns in Seminiferous Tubules	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Bulletin of Mathematical Biology	6. 最初と最後の頁 33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11538-021-00863-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Chang Chueh-Hsin, Chen Chiun-Chuan, Hung Li-Chang, Mimura Masayasu, Ogawa Toshiyuki	4. 巻 33
2. 論文標題 Existence and stability of non-monotone travelling wave solutions for the diffusive Lotka-Volterra system of three competing species	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 5080 ~ 5110
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ab9244	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kuze Masakazu, Horisaka Mari, Suematsu Nobuhiko J., Amemiya Takashi, Steinbock Oliver, Nakata Satoshi	4. 巻 123
2. 論文標題 Chemical Wave Propagation in the Belousov-Zhabotinsky Reaction Controlled by Electrical Potential	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Journal of Physical Chemistry A	6. 最初と最後の頁 4853 ~ 4857
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1021/acs.jpca.9b02636	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohno Kota, Ogawa Toshiyuki, Suematsu Nobuhiko J.	4. 巻 99
2. 論文標題 Competition between global feedback and diffusion in coupled Belousov-Zhabotinsky oscillators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 12208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.99.012208	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Gani M. Osman, Ogawa Toshiyuki	4. 巻 79
2. 論文標題 Spiral breakup in a RD system of cardiac excitation due to front-back interaction	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Wave Motion	6. 最初と最後の頁 73 ~ 83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.wavemoti.2018.02.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Miyaji Tomoyuki, Ogawa Toshiyuki, Sekisaka Ayuki	4. 巻 35
2. 論文標題 Rippling rectangular waves for a modified Benney equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 939 ~ 968
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-018-0304-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Suematsu Nobuhiko J., Nakata Satoshi	4. 巻 24
2. 論文標題 Evolution of Self-Propelled Objects: From the Viewpoint of Nonlinear Science	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Chemistry - A European Journal	6. 最初と最後の頁 6308 ~ 6324
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/chem.201705171	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamasu Akiko, Suematsu Nobuhiko J., Kimura Seisuke	4. 巻 246
2. 論文標題 Asymmetries in leaf branch are associated with differential speeds along growth axes: A theoretical prediction	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Developmental Dynamics	6. 最初と最後の頁 981 ~ 991
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/dvdy.24587	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 小川知之, 小林俊介
2. 発表標題 Compact metric graph上のTuring不安定性
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 関坂歩幹, 小川知之
2. 発表標題 振動場反応拡散系に現れるセグメントパターンの安定性について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大野航太, 小川知之
2. 発表標題 Stability of traveling wave in nonlocally coupled oscillator system
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiyuki Ogawa
2. 発表標題 Alien invasion into the buffer zone between two competing species
3. 学会等名 ReaDiNet 2023: International conference on parabolic and stochastic models in mathematical biology (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 小川知之, 関坂歩幹
2. 発表標題 Four-scroll attractor modelの幾何学的構造について
3. 学会等名 2021日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大野航太, 小川知之
2. 発表標題 Oscillatory behaviors observed in nonlocally coupled FitzHugh-Nagumo system
3. 学会等名 2021年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小川知之, 栄伸一郎, 池田榮雄, 三村昌泰
2. 発表標題 Bifurcation of a non-trivial traveling wave solution in a 3-component competition-diffusion system
3. 学会等名 日本数学会2021年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大野航太, 小川知之, 末松信彦
2. 発表標題 BZ 反応振動子系への大域的フィードバック制御
3. 学会等名 応用数理学会2018年 年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshiyuki Ogawa
2. 発表標題 Rippling Rectangular Waves for a Modified Benney Equation
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大野航太, 小川知之, 末松信彦
2. 発表標題 BZ 反応を用いた反応拡散系の大域的制御
3. 学会等名 2017 年度応用数 学合同研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大野航太、小川知之、末松信彦
2. 発表標題 BZ 反応を用いた振動場反応拡散系の大域的制御
3. 学会等名 第 27 回 非線形反応と協同現象研究会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 小川 知之、宮路 智行	4. 発行年 2020年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 208
3. 書名 数理モデルとシミュレーション	

〔産業財産権〕

〔その他〕

日本応用数学会 論文賞 2022年9月 Computing Morse decomposition of ODEs via Runge-Kutta method Yuki Chiba, Tomoyuki Miyaji, Toshiyuki Ogawa JSIAM Letters 13 40-43 2021年
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	末松 信彦  (Suematsu Nobuhiko)  (80542274)	明治大学・総合数理学部・専任教授    (32682)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	宮路 智行  (Miyaji Tomoyuki)  (20613342)	京都大学・理学研究科・准教授    (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関