

令和 2 年 7 月 1 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05377

研究課題名(和文) 周期的観測下でのパリジャン反射戦略と動的最適化

研究課題名(英文) Parisian reflection strategies and dynamic optimization

研究代表者

山崎 和俊 (YAMAZAKI, Kazutoshi)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：50554937

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：レヴィー過程理論はファイナンス、保険、待ち行列等、広い分野で用いられ、その近年の発展は従来のブラウン運動モデルに代わる現実的なモデルを可能にしてきた。最適制御問題への応用においては、反射過程等に関する理論の直接の応用が可能であり、それらはレヴィー過程理論とともに発展してきた。本研究では、レヴィー過程の最適制御問題において、通常の連続的観測に代わるポアソンの観測モデルでの最適解の解析、および必要となる理論の構築を行った。レヴィー過程のポアソンの観測に関する理論的研究をさらに深め、最適配当問題、最適在庫問題、最適停止問題に適用し、最適解の導出方法および最適性の証明の手法を確立させた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連続時間確率制御問題はこれまで連続観測モデルに焦点が当てられ、伊藤の公式や微分方程式論を駆使することによって、様々な理論的結果が得られてきた。しかしながら、現実には観測は離散的に行われ、連続的観測モデルがその近似を正確に行えられるかを調べることは非常に重要な課題であった。一方で離散観測モデルでは一般的には解析的手法の利用が難しく、数値的アプローチに限られてきた。本研究では観測がポアソンの場合、に焦点を当てることで、解析的アプローチを確立させた。

研究成果の概要(英文)：Levy processes are used in various fields such as finance, insurance and queues. Their recent developments have enabled us to achieve realistic models, generalizing greatly the traditional Brownian motion models. Regarding their applications in optimal stochastic control, analytical results such as those on reflected processes can be directly used. This research focused on a version of stochastic control where observation times are given by Poisson arrival times and developed analysis on optimal solutions and theories needed to achieve these. By studying further the related results on Levy processes observed at Poisson arrival times, we solved the optimal dividend, inventory and stopping problems, establishing procedures and techniques for the derivation of optimal solutions.

研究分野：確率論、数理ファイナンス、保険数学

キーワード：レヴィー過程 ファイナンス 保険 在庫管理 確率制御

様式 C-19, F-19-1, Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 確率的最適制御問題の連続時間モデルでは、利得の最大化（またはコストの最小化）を目的とし、ある決められた関数の期待値を最適化する戦略を求める。多くのモデルでは利得（コスト）関数の単調性や凸性等の仮定の下で、「バリア戦略」の最適性の解析に焦点が当てられている。最適制御問題の代表例である最適配当問題では、企業の余剰資金が底をつく破産時刻までの期待配当額の最大化を目的とし、ある閾値の超過分を配当として支払い続ける戦略が最適戦略となる。この場合の被制御過程はその閾値を反射壁とする反射過程となり、特にブラウン運動や一部のレヴィー過程の場合には、反射過程に関する既存の古典的結果が最適化問題の解法に直接活用されてきた。

(2) しかしながら、これらの既存の結果の多くでは連続的な観測を仮定しており、その現実的な応用には限界がある。観測にはコストが発生し、また観測頻度を高めることは物理的にも不可能なことが多い。実際に、多くのモデルにて最適とされる反射戦略が現実世界で見られることは非常に少ない。

(3) 一方で、研究開始当初、連続的観測に代わる、周期的な観測下での確率解析が進められていた。特に観測間隔が独立な指数分布を持つ場合には、解析的なアプローチも可能になってきていた。

2. 研究の目的

本研究では、レヴィー過程の最適制御問題において、観測（制御機会）が周期的にのみ訪れる場合の解析とその応用を目指した。通常最適制御問題では連続的観測が仮定され、簡潔かつ解析的な最適解が得られることが多い。一方で、その仮定は現実的ではなく、それが緩和された場合にどれだけ最適解が変化するかを解析することは極めて重要である。本研究では、最適配当問題や在庫管理問題を中心に、観測時に対象となる確率過程がある閾値を超えていた場合にその閾値まで押し戻す「パリジャン反射戦略」の最適性の解析を第一の目的とした。また、最適停止問題への応用も視野に入れ、同様の解析手法が適用できるか、その更なる可能性を追求した。

3. 研究の方法

Pérez and Yamazaki [1]等の論文により、下向きジャンプ付きレヴィー過程（負スペクトルレヴィー過程）モデルにおいては、観測間隔が独立な指数分布に従う場合の、退出時刻やレゾルベント等の計算手法が変動理論(fluctuation theory)により求められていた。それらの結果をさらに拡張し、また尺度関数(scale function)を効率的に用いることで、最適制御問題での最適解の予測およびその最適性の証明までを行った。さらに数値解析も並行して行い、観測機会が増加するにつれて連続観測下での最適解に収束するかを確かめるべく、数値実験を行った。

4. 研究成果

(1) Pérez and Yamazaki [1]では、ポアソン到着時刻にある閾値に戻されるパリジャン反射過程について様々な解析的結果を得た。それらを用い最適配当問題への応用を行い、配当機会があ

る独立なポアソン過程のジャンプ時刻に限られる場合を扱った。この問題設定においては、正スペクトルレヴィー過程の場合（デュアルモデル）において、[2]にて各ポアソンの配当機会にある閾値を超えていた場合にその超過分を配当として支払うパリジャン反射戦略の最適性が示されていた。ここで、[3]にて負スペクトルレヴィー過程モデルにおいても同様に成り立つかを解析した。パリジャン反射戦略の最適性は一般には成り立たないものの、レヴィー測度の密度が完全単調(completely monotone)な場合において最適性が成り立つことを示した。またポアソン到着の頻度の増加とともに、連続的観測下での最適解に収束することを解析的かつ数値的に示した。

次に[3]の結果を資本注入がある場合へ拡張した。[3]と同様に配当機会がポアソンのため、さらに資本注入により企業の余剰資金を正值に保つ条件下での配当—資本注入の最適戦略を求めた。ここで、上記のパリジャン反射戦略の拡張として、一般的な負スペクトルレヴィー過程の場合に下側に古典的な反射を加えた戦略が最適であることを示した[4]。

(2) アメリカ型オプションの無限期間レヴィー過程モデルでは、Mordecki [5]らにより、コールオプションの場合にはある閾値を初めて超えた時刻、プットオプションの場合には初めて下回った時刻に権利行使するバリア戦略が最適であることが知られている。ここで、停止機会が連続的ではなく、独立なポアソン到着時刻にのみ可能な場合の解析を行った。

まず、[6]では割引率が正の場合を扱い、ポアソンの停止機会の中で初めてある閾値を上回った（下回った）時刻に権利行使することが最適であることを示した（図1を参照）。特に正スペクトルレヴィー過程と負スペクトルレヴィー過程の場合には具体的に最適解が尺度関数を用いて解析的に得られることを示した。

次に、[7]において、割引率が負の場合の解析を行った。De Donno et al. [8]により連続的観測の下、割引率が負の場合には最適戦略がバリア戦略にはならず、資産価格がある区間に初めて入った時刻に権利行使する区間戦略が最適である場合があることが分かっており、同様の結果がポアソンの観測の場合にも成り立つことを示した。変動理論を用いて解析的な価値関数の表現を求め、さらにポアソン到着の頻度が増加するにつれて[8]での結果に収束することを示した。また数値解析を通して、区間戦略の最適性とポアソン到着の頻度についての[8]への収束を確かめた。

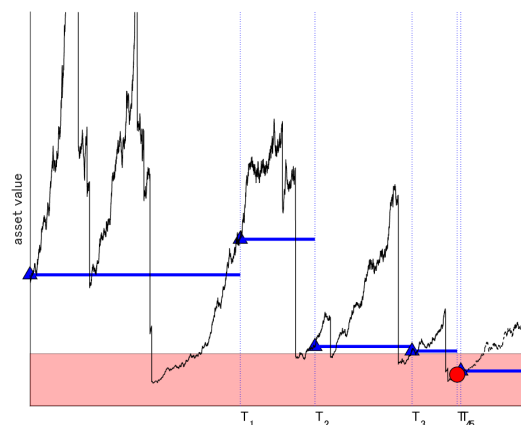


図 1 : Pérez and Yamazaki [6]での最適戦略。ポアソンの観測時刻 T の中で初めて赤で示される停止領域に入った時刻が最適停止時刻となる。

(3) 連続時間在庫管理問題において、通常の連続的補充機会ではなく、独立なポアソン到着時刻にのみ補充が可能な場合の解析を行った[9]。最適配当問題の場合と同様に、パリジャン反射

戦略下での補充コスト及び在庫コストの期待値を尺度関数を用いて表現し、最適閾値の計算及びその最適性の証明を行った。

(4) 企業の最適資本構成を扱うLeland-Toftモデルにおいて、連続的観測ではなく、ポアソン到着時刻にのみ資産額の観測が可能な場合を考察した[10]。ポアソン到着時刻の中である閾値を下回った時刻を倒産時刻とし、その最適閾値を求めた。また、数値実験を通して、様々なパラメータに対しての最適資本構成及び信用スプレッドの計算を行った。

引用文献

- [1] Pérez, J.L., Yamazaki, K. (2018). “Mixed periodic-classical barrier strategies for Lévy risk processes,” *Risks*, 6(2), 33.
- [2] Pérez, J.L., Yamazaki, K. (2017). “On the optimality of periodic barrier strategies for a spectrally positive Lévy process,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 77, 1–13.
- [3] Noba, K., Pérez, J.L., Yamazaki, K., Yano, K. (2018). “On optimal periodic dividend strategies for Lévy risk processes,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 80, 29–44.
- [4] Noba, K., Pérez, J.L., Yamazaki, K., Yano, K. (2018). “On optimal periodic dividend and capital injection strategies for spectrally negative Lévy models,” *Journal of Applied Probability*, 55(4), 1272–1286.
- [5] Mordecki, E. (2002). Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes. *Finance and Stochastics*, 6(4), 473–493.
- [6] Pérez, J.L., Yamazaki, K. (2018). “American options under periodic exercise opportunities,” *Statistics & Probability Letters*, 135, 92–101.
- [7] Palmowski, Z., Pérez, J.L., Yamazaki, K. (2020). “Double continuation regions for American options under Poisson exercise opportunities,” *arXiv:2004.03330*.
- [8] De Donno, M., Palmowski, Z., Tumilewicz, J. (2020). “Double continuation regions for American and swing options with negative discount rate in Lévy models,” *Mathematical Finance*, 30(1), 196–227.
- [9] Pérez, J.L., Yamazaki, K., Bensoussan, A. (2018). “Optimal periodic replenishment policies for spectrally positive Lévy demand processes,” *arXiv:1806.09216*.
- [10] Palmowski, Z., Pérez, J.L., Surya, B., Yamazaki, K. (2019). “The Leland-Toft optimal capital structure model under Poisson observations,” *Finance and Stochastics*, 掲載予定.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 10件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 K. Noba, J.L. Perez, K. Yamazaki, K. Yano	4. 巻 55
2. 論文標題 On optimal periodic dividend and capital injection strategies for spectrally negative Levy models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Applied Probability	6. 最初と最後の頁 1272-1286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jpr.2018.85	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 J.L. Perez, K. Yamazaki, X. Yu	4. 巻 179
2. 論文標題 The bail-out optimal dividend problem under the absolutely continuous condition	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Optimization Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 553-568
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10957-018-1340-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 I. Czarna, J.L. Perez, K. Yamazaki	4. 巻 83
2. 論文標題 Optimality of multi-refraction control strategies in the dual model	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Insurance: Mathematics and Economics	6. 最初と最後の頁 148-160
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.insmatheco.2018.09.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 J.L. Perez, K. Yamazaki	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Optimality of Hybrid Continuous and Periodic Barrier Strategies in the Dual Model	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Optimization	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00245-018-9494-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 I. Czarna, J.L. Perez, T. Rolski, K. Yamazaki	4. 巻 129
2. 論文標題 Fluctuation theory for level-dependent Levy risk processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 5406-5449
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2019.03.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Avram, J.L. Perez, K. Yamazaki	4. 巻 128
2. 論文標題 Spectrally negative Levy processes with Parisian reflection below and classical reflection above	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 255 ~ 290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.spa.2017.04.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J.L. Perez, K. Yamazaki	4. 巻 77
2. 論文標題 On the optimality of periodic barrier strategies for a spectrally positive Levy process	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Insurance: Mathematics and Economics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.08.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J.L. Perez, K. Yamazaki	4. 巻 135
2. 論文標題 American options under periodic exercise opportunities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Statistics and Probability Letters	6. 最初と最後の頁 92 ~ 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.11.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Noba, J.L. Perez, K. Yamazaki, K. Yano	4. 巻 80
2. 論文標題 On optimal periodic dividend strategies for Levy risk processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Insurance: Mathematics and Economics	6. 最初と最後の頁 29 ~ 44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2018.02.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J.L. Perez, K. Yamazaki	4. 巻 6(2)
2. 論文標題 Mixed Periodic-Classical Barrier Strategies for Levy Risk Processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Risks	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.3390/risks6020033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 American options under periodic exercise opportunities
3. 学会等名 A Symposium on Optimal Stopping (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 Optimal periodic replenishment policies for spectrally positive Levy demand processes
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Finance and Symposium on the Role of Mathematical Finance on FinTech Business, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 Stochastic control under periodic observation times
3. 学会等名 Advanced Methods in Mathematical Finance (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎和俊
2. 発表標題 「レヴィー過程の変動理論とその応用」(特別講演)
3. 学会等名 確率論ヤングサマーセミナー(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 Periodic observations of spectrally one-sided Levy processes and applications to inventory control
3. 学会等名 Second Interdisciplinary and Research Alumni Symposium iJaDe2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 On optimal periodic dividend strategies for Levy risk processes
3. 学会等名 Ritsumeikan-Nankai Joint Workshop on Probability Theory and its Applications to Insurance and Finance (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 American Options under Periodic Exercise Opportunities
3. 学会等名 INFORMS 2019 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎和俊
2. 発表標題 金融工学における最適停止問題
3. 学会等名 RAMPシンポジウム (RAMP2018) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎和俊
2. 発表標題 周期的補充機会下での最適在庫問題
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年秋季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 Leland-Toft optimal capital structure with random observation times
3. 学会等名 Sixth Asian Quantitative Finance Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎和俊
2. 発表標題 Queues driven by level dependent Levy processes
3. 学会等名 2018年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 The Leland-Toft optimal capital structure model under periodic observations
3. 学会等名 Workshop on Financial Risks and Their Management (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 Fluctuation theory for level-dependent Levy risk processes
3. 学会等名 Stochastic Processes and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山崎和俊
2. 発表標題 周期的観測下での内生的倒産と最適資本構成
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年春季研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 Parisian reflection and applications in insurance and credit risk
3. 学会等名 The 5th Asian Quantitative Finance Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 Optimality of Hybrid Continuous and Periodic Barrier Strategies in the Dual Model
3. 学会等名 The Third International Conference on Engineering and Computational Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Yamazaki
2. 発表標題 On optimal periodic dividend strategies for Levy risk processes
3. 学会等名 Mathematics of Risk (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山崎 和俊
2. 発表標題 周期的行使機会下でのアメリカ型オプション
3. 学会等名 数理解析研究所研究集会「ファイナンスの数理解析とその応用」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山崎 和俊
2. 発表標題 周期的行使機会下でのアメリカ型オプション
3. 学会等名 日本オペレーションズリサーチ学会2018年春季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎 和俊
2. 発表標題 Fluctuation theory for level dependent Levy processes
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

山崎和俊のホームページ https://sites.google.com/site/kyamazak/
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考