

令和 2 年 6 月 15 日現在

機関番号：62603

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05379

研究課題名(和文) 角度の観測を含むデータのためのコピュラ理論

研究課題名(英文) Copula theory for multivariate circular data

研究代表者

加藤 昇吾 (Kato, Shogo)

統計数理研究所・数理・推論研究系・准教授

研究者番号：60468535

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：角度の観測を含むデータの統計解析法として、コピュラの研究が近年盛んに行われている。しかし、既存のコピュラは単純な依存関係しか表すことができないという問題点があった。本研究では、2つの新たな統計モデル、つまり、(1) 既存のコピュラとは異なる依存関係を持つトーラス上のコピュラ(2つの角度のペアのデータのためのコピュラ)、(2) シリンダー上のコピュラ(角度と実数値のペアのデータのためのコピュラ)に関連した確率分布、を新たに提案した。そして、提案した2つの統計モデルが扱いやすい多くの統計的性質を持つことを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、角度の観測を含む2変量データに対する新たな2つのモデルを提案した。1つ目のモデルは2次元トーラス上のコピュラであり、このコピュラが既存のコピュラでは表現できなかった多様な依存関係を表現できることを示した。また、2つ目のモデルは、2次元シリンダー上のコピュラに関連した確率分布である。この分布は、パラメータの解釈がしやすく、解析的に扱いやすい多くの性質を持つことを明らかにした。本研究で提案した2つのモデルは、理論的な扱いにくさ故に考慮されないことが多かった角度の情報を統計解析に有効的に活用することを可能とし、様々な学術分野へと応用される可能性があると考えている。

研究成果の概要(英文)：Copula has gained its popularity as a tool for analyzing multivariate data which include angular observations. However existing copulas for such data can express only limited relationships between variables. In this research project, we have proposed new families of copulas on the torus which can be used for the analysis of pairs of two angles. It has been seen that the proposed copulas can express different dependence structures from the existing ones. In addition, in order to analyze pairs of a linear and angular variables, we have presented a new family of probability distribution on the cylinder which is derived from a general class of copulas on the cylinder. It has been shown that both of the proposed models have various tractable properties.

研究分野：統計数学

キーワード：数理統計学 コピュラ 方向統計学 回帰分析

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

様々な学問分野において、角度として表される観測値が得られることがある。例えば、気象学における風向の観測はその一例である。風向は、北を0とし、時計回りを正の向きとすれば、東を $\pi/2$ 、南を $\pi$ 、西を $3\pi/2$ のように角度で表すことができる。つまり、任意の風向は0以上 $2\pi$ 未満の角度 $\theta$ 、もしくは円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ として表現できる。他には、バイオインフォマティクスにおける分子のねじれ角も同様に、角度の観測と解釈することができる。その他、医学・地震学・動物行動学などの分野においても角度の観測が存在している。

角度のデータには、統計解析をする上で大きな問題がある。それは、このようなデータを解析する上では、統計学が主に対象としている実数値データのための解析手法をそのまま使うことができないという問題である。そしてこの問題は、角度の1変量データに対してのみではなく、角度の観測を含む多変量データについても同様に当てはまる。つまり、データに1つでも角度の観測が含まれている場合には、ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ 値データのための手法をそのまま用いることができないのである。これは、観測機器などの発達により多くの変量を持つデータが得られるようになった現代において大きな問題である。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、角度の観測を含むデータのためのコピュラの理論を構築することである。コピュラは変量間の依存関係を記述するための確率分布である。コピュラを用いることにより、多様な変量間の依存関係をモデル化することが可能となる。コピュラは近年、多くの理論研究がなされ、ファイナンスを始めとして様々な学術分野で応用されはじめている。本研究では、角度の観測を含む多変量データのためのコピュラの理論の発展のため、既存研究とは異なるアプローチを用いて、多様な依存関係を記述でき、かつ数学的な扱いやすさを持つコピュラおよびコピュラに関連した確率分布の提案を目指した。

### 3. 研究の方法

本研究では、コピュラに関連した2つの研究テーマに取り組んだ。具体的には、(1) 新たな2次元トーラス上のコピュラの研究、そして、(2) 新たな2次元シリンダー上の確率分布の研究、である。以下、それぞれの研究の方法について述べる。

- (1) 1つ目の研究として、新たな2次元トーラス上のコピュラ(2つの角度のペアのデータのためのコピュラ)の提案とその統計的性質・推測の考察を行った。この研究にあたっては、研究代表者の過去の研究結果(Kato and Jones, 2015)のアイデアの一部を活用して取り組んだ。Kato and Jones (2015)では、円周上の新たな非対称分布を提案し、その統計的性質を調べている。この研究そのものはコピュラとは直接関係はないが、この論文の着目すべき点は、分布の導出を特性関数の特徴付けによって行った点にある。研究代表者は、このアイデア(特性関数による特徴付け)をコピュラの提案に生かすことで、新たな2次元トーラス上のコピュラを得た。
- (2) 2つ目の研究では、新たな2次元シリンダー上の確率分布(角度と実数値のペアのデータのための確率分布)を提案し、その統計的性質・推測の考察を行った。この研究では、Johnson and Wehrly (1978)の結果を一部参考にした。彼らは、周辺分布を自由にとることができる2次元シリンダー上の確率分布族を提案した。この分布族は、確率変数変換により、2次元シリンダー上のコピュラとみなすことができる。この一般的な分布族の定義を変更し、実数上の周辺分布、円周上の周辺分布、コピュラ関数に適切な仮定をおくことにより、新たな2次元シリンダー上の確率分布を得た。

上記に述べた方法で、新たな2次元トーラス上のコピュラ、および、新たな2次元シリンダー上の確率分布を提案し、それぞれの分布の統計的性質について考察した。

### 4. 研究成果

以下、本研究の研究成果を年度ごとにまとめて述べることにする。

- (1) [平成29年度] 1年目にあたる平成29年度には、新たな2次元トーラス上のコピュラの提案およびその統計的性質・推測の考察を行った。このコピュラを提案した方法については、「3. 研究の方法」の(1)で述べた通りである。そして、提案したコピュラは、既存のト

ーラス上のコピュラとしてよく知られる Wehrly and Johnson (1980)のコピュラでは成しえなかった中央や裾付近での多様な依存関係を表現することが可能となることを示した。また、このコピュラは、分布関数や確率密度関数が陽に表せること、パラメータの解釈が容易であること、dependence measure が簡潔に表現できること、最尤法に基づくパラメータ推定値を数値的に求めることができることなど、扱いやすい多くの性質が成り立つことを明らかにした。

トーラス上のコピュラについては、既存のモデルは（研究代表者の知る限り）すべて Wehrly and Johnson (1980)のコピュラのサブモデルであり、単純な依存関係を持つモデルであった。それに対して本研究のコピュラは、中央付近や裾の挙動を調節することができ、Wehrly and Johnson (1980)のコピュラでは実現できない依存関係の表現を可能としている。

新たに提案した2次元トーラス上のコピュラにより、理論的な扱いにくさ故に考慮されないことが多かった角度の情報をコピュラによる解析に有効的に取り込むことが可能となる。これにより、コピュラの理論の進展および様々な学術分野への応用が期待できるのではないかと考えている。

- (2) [平成30年度] 2年目に当たる平成30年度は、新たな2次元シリンダー上の確率分布の研究を行った。その分布の導出については、「3. 研究の方法」の(2)で述べたため、ここでは割愛する。提案した分布について、以下の扱いやすい性質が成り立つことを明らかにした。

- (a) 確率密度関数を、積分や無限級数などを含まない陽な形で表わすことができる。
- (b) 実数値変数の周辺分布が実数上のコーシー分布、角度の変数の周辺分布が円周上のコーシー分布となる。
- (c) 実数値変数を与えたときの角度の変数の条件付き分布が円周上のコーシー分布となり、角度の変数を与えたときの実数値変数の条件付き分布が実数上のコーシー分布となる。
- (d) パラメータは5つあり、それぞれのパラメータの解釈が明確である。2つのパラメータは実数値変数の周辺分布の位置と尺度、2つのパラメータは角度の変数の周辺分布の位置と集中度、そしてもう1つのパラメータは変数間の関係の強さを調節する。
- (e) 2つの(0,1)上の一様乱数を用いて、得られた分布に従う2次元確率ベクトルを棄却なく1つ発生することができる。

上記の性質(a)-(e)は、Johnson and Wehrly (1978)による一般の分布族には成立せず、また、研究代表者の知る限り、他の既存のシリンダー上の分布においても全てが成り立つものは存在しない。今回得られた分布は、その解析的な扱いやすさにより、シリンダー上のデータの統計解析において有用となると考えている。

- (3) [令和元年度] 3年目に当たる令和元年度は、2年目の研究で得られた2次元シリンダー上の確率分布の性質を引き続き研究するとともに、関連した回帰モデルの提案およびその性質の研究を行った。2年目の研究で得られた2次元シリンダー上の確率分布について、3年目は以下の結果を得た。

- (a) 最尤推定量の漸近分散が陽な形で表されることを示した。
- (b) 2つの位置パラメータの最尤推定量と2つの尺度パラメータの最尤推定量を除き、任意のパラメータのペアの最尤推定量は直交することを示した。
- (c) 特性関数または確率点に基づくパラメータの推定量が陽な形で表されることを示した。
- (d) 提案した確率分布の密度関数の最頻値に関する結果を一般化し、ある条件の下での Johnson and Wehrly (1978)によるコピュラの密度関数の最頻値を得た。

また、2次元シリンダー上の確率分布に関連した話題として、2つの回帰モデルの提案を行った。いずれも、2次元シリンダー上の確率分布の条件付き分布から導かれる回帰モデルである。(i) 1つ目のモデルは角度を被説明変数、実数値を説明変数とする回帰モデル、(ii) 2つ目のモデルは、実数値を被説明変数、角度を説明変数とする回帰モデルである。これらの回帰モデルの性質として、(i)と(ii)はいずれも回帰曲線がメビウス変換の形で表され、それぞれのパラメータが解釈が容易であることを明らかにした。また、(i)は Fisher and Lee (1992)による回帰曲線をより柔軟にした回帰曲線を持つことがわかった。

平成30年度および令和元年度に得られた結果により、2次元シリンダー上の確率分布および関連した回帰モデルは、モデルの解釈がしやすく、解析的に扱いやすい性質を持つことが明らかになった。これらの性質により、いずれの統計モデルもシリンダー上のデータの統計解析において有用となると考えている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ignacio Leguey, Pedro Larranaga, Concha Bielza and Shogo Kato	4. 巻 486
2. 論文標題 A circular-linear dependence measure under Johnson-Wehrly distributions and its application in Bayesian networks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Information Sciences	6. 最初と最後の頁 240-253
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.01.080">https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.01.080</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Louis-Paul Rivest and Shogo Kato	4. 巻 47
2. 論文標題 A random effects model for clustered circular data	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Statistics	6. 最初と最後の頁 712-728
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1002/cjs.11520">https://doi.org/10.1002/cjs.11520</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shogo Kato and Peter McCullagh	4. 巻 -
2. 論文標題 Some properties of a Cauchy family on the sphere derived from the Moebius transformations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bernoulli (to appear)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Masanobu Taniguchi, Shogo Kato, Hiroaki Ogata and Arthur Pewsey	4. 巻 -
2. 論文標題 Models for circular data from time series spectra	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Time Series Analysis (to appear)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計21件(うち招待講演 13件/うち国際学会 15件)

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 Möbius transformation and a multivariate Cauchy family on the sphere
3. 学会等名 ADISTA17 International Directional Statistics Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shogo Kato, Ignacio Leguey, Concha Bielza and Pedro Larranaga
2. 発表標題 A Bayesian network model for linear-circular data
3. 学会等名 The 10th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (CMStatistics 2017) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 A Bayesian network model for linear-circular data
3. 学会等名 ISI-ISM-ISSAS Joint Conference Tokyo 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 Statistics of circular data
3. 学会等名 The 26th South Taiwan Statistics Conference, 2017 Chinese Institute of Probability and Statistics Annual Meeting and Chung-hwa Data Mining Society Annual Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ignacio Leguey, Concha Bielza, Pedro Larranaga and Shogo Kato
2. 発表標題 A Bayesian network model for linear-circular data
3. 学会等名 Waseda International Symposium "Recent Developments for Statistical Asymptotic Theory for Time Series & Circular Distributions" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 A Bayesian network model for linear-circular data
3. 学会等名 2017年度 統計関連学会連合大会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shogo Kato and Peter McCullagh
2. 発表標題 Moebius transformation and a Cauchy family on the sphere
3. 学会等名 Waseda International Symposium "Recent Developments in Time Series Analysis: Quantile Regression, High Dimensional Data & Causality" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加藤 昇吾
2. 発表標題 実数値と角度の観測が混在するデータのためのベイジアンネットワークモデル
3. 学会等名 統計数理セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shogo Kato, Arthur Pewsey and M.C. Jones
2. 発表標題 Circulas obtained through a Fourier series based approach
3. 学会等名 The 11th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (CMStatistics 2018) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shogo Kato, Arthur Pewsey and M.C. Jones
2. 発表標題 A class of circulas obtained through a Fourier series based approach
3. 学会等名 日本数学会 2018年度 秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加藤 昇吾
2. 発表標題 2変量分布の上側と下側の裾確率を比較するための尺度
3. 学会等名 統計数理セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 A measure for comparing the upper and lower tail probabilities of bivariate distributions
3. 学会等名 The 28th South Taiwan Statistics Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 A copula-based measure for comparing the upper and lower tail probabilities of bivariate distributions
3. 学会等名 SEED Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shogo Kato and Peter McCullagh
2. 発表標題 Möbius transformation and a Cauchy family on the sphere
3. 学会等名 The 62nd ISI World Statistics Congress 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 Bayesian network model for multivariate data which include circular observations
3. 学会等名 International Conference on Environmental Statistics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shogo Kato, Toshinao Yoshiba and Shinto Eguchi
2. 発表標題 A copula-based measure for comparing the upper and lower tail probabilities of bivariate distributions
3. 学会等名 2019年度 統計関連学会連合大会
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Shogo Kato and Peter McCullagh
2. 発表標題 A Cauchy family derived by the Moebius transformations of the sphere
3. 学会等名 International Symposium on Theories and Methodologies for Large Complex Data (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤 昇吾
2. 発表標題 角度データのための混合効果モデル
3. 学会等名 統計数理セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shogo Kato, Toshinao Yoshiba and Shinto Eguchi
2. 発表標題 A measure for comparing upper and lower tail probabilities of bivariate distributions
3. 学会等名 Waseda International Symposium "Introduction of General Causality to Various Data & its Applications" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 A measure for comparing upper and lower tail probabilities of bivariate distributions
3. 学会等名 Pioneering Workshop on Extreme Value and Distribution Theories in Honor of Professor Masaaki Sibuya (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shogo Kato
2. 発表標題 A measure for comparing upper and lower tail probabilities of bivariate distributions
3. 学会等名 ISI-ISM-ISSAS Joint Conference 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

加藤昇吾 Personal HP <a href="http://www.ism.ac.jp/~skato/">http://www.ism.ac.jp/~skato/</a>  researchmap (加藤昇吾、日本語) <a href="http://researchmap.jp/read0138993/?lang=japanese">http://researchmap.jp/read0138993/?lang=japanese</a>  researchmap (加藤昇吾、英語) <a href="http://researchmap.jp/read0138993/?lang=english">http://researchmap.jp/read0138993/?lang=english</a>
--

6. 研究組織		
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)
		備考