

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 16 日現在

機関番号：82118

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05428

研究課題名(和文) 高次輻射補正に現れる発散を伴うマルチループのファインマン積分の完全数値的な計算法

研究課題名(英文) Fully numerical method for divergent multi-loop Feynman integrals appearing in higher order radiative corrections

研究代表者

湯浅 富久子 (Fukuko, YUASA)

大学共同利用機関法人高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・名誉教授

研究者番号：00203943

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：我々は摂動法による高次輻射補正に現れるファインマン積分の計算法を開発している。摂動法で取扱うのは、ファインマンダイアグラムの計算であり、高次の場合にはループを有するダイアグラムが現れファインマン積分が出現する。この積分は「紫外・赤外発散」及び「被積分関数の分母が0となるときの発散」を有する。我々は発散を正則化するパラメータを有限化した上で積分を実施し、その後外挿法で極限を求めている。この手法は完全に数値的で、ループ数/内線数/内線の質量/外線運動量/によらずに発散部分と有限部分を同時に求められる。本研究では、5ループ内線数14のファインマン積分までを対象として我々の計算法の性能を評価した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

完全に数値的な手法を用いることで、内線の質量/外線運動量/ループ数/内線数によらない統一的な計算法で高次輻射補正に現れるファインマン積分を求めることにより、高次補正まで含んだ理論予測値を得ることができる。将来の加速器実験では、素粒子理論での標準理論の検証が非常に精密に行われ、特に電弱相互作用の研究が重要となる。電弱相互作用では、様々な質量の素粒子が関与するために解析的な方法のみでは対応は困難であり、我々が開発する数値計算法が有用となる。我々の方法は、計算機の能力によるところが大きい、今後ますます計算機が発展することが期待される今日においては、有望で持続可能な方法である。

研究成果の概要(英文)：We have been developing a fully numerical method for an evaluation of Feynman integrals which appear in calculation of higher order radiative corrections. In perturbation theory calculations are carried out based on Feynman diagrams. When the order becomes higher, there appear diagrams with loop topology and an evaluation of Feynman integrals is necessary and it becomes a crucial task. Generally speaking, they are difficult integrals due to ultra violet and infrared divergences and singular behaviors of integrands. Our method is a combination of numerical a multi-dimensional integration and an extrapolation method. It is fully numerical and it can handle Feynman integrals with various physics parameters such as masses of internal lines and external momenta. In this research period, our method shows a good performance for the computation of Feynman diagrams up to 5-loops with 14 internal lines.

研究分野：計算素粒子物理学

キーワード：高次輻射補正 ファインマン積分 マルチループ 多次元数値積分 並列計算

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

素粒子物理学では、物質の根源や時空の理解を進めようと標準理論やそれを超える理論などが提案され理論的な研究が進展している。高エネルギー加速器実験では、測定器技術の発展により、非常に精密な実験データが取得されるようになってきている。実験データを理解するためには実験データよりも精度の高い理論予測値が必要である。

欧州原子核研究機構 (CERN) の LHC (Large Hadron Collider) は、性能向上のための改良をすませ 2015 年より 13TeV の衝突エネルギーで加速器運転を再開した。2016 年には物理データの取得も再開し、素粒子物理学は新物理探索の「精密時代」に突入した。LHC は陽子・陽子衝突型加速器であり、強い相互作用プロセスでの高次輻射補正が最優先であった。質量をもたない粒子を扱う場合については、ファインマン積分の解析的な取扱いが主流で、ヨーロッパを中心に研究が発展した。近年は、電弱相互作用の重要性が明らかになってきたことを受けて、質量をもつ粒子を含んだファインマンダイアグラムを対象に、部分積分法、特異性を抽出するセクター分解の方法、差分方程式を解く方法など多方面から研究が進められている。本研究開始当初、我々はファインマン積分の数値計算法を開発し、内線の粒子が質量を有する 1 ループ 6 点関数まで / 2 ループ 4 点関数までについて、ファインマン積分を計算可能であることを確認し、続いて質量のない粒子やより幅広い種類の粒子にも適用できるよう計算法の改良を計画していた。

計算機を用いる研究は、計算機の性能に強く依存する。2010 年代は、国産のスーパーコンピュータの運用が開始され、世界の中で優秀な成績を示すなど国内で計算機の性能に注目が集まる時代であった。スーパーコンピュータだけではなく次々と開発される新アーキテクチャの計算機的能力を最大限にひき出すためには、それに適する計算法の改良が欠かせない。我々の開発する数値計算法においても、計算機科学および計算科学の研究者との協働による相乗効果によって更なる進展と性能向上を見込むことができた。

2. 研究の目的

ファインマンダイアグラムによる摂動計算の処方箋は既知であるが、高次輻射補正ではループを含むダイアグラムが現れファインマン積分の取り扱いが必要となる。本研究の目的は、完全に数値的な手法によることで、素粒子反応計算の高次輻射補正に現れるファインマン積分の、内線の質量/外線運動量/ループ数やダイアグラムのトポロジーによらない統一的な計算法を確立することである。

ファインマン積分は発散を有する積分である。ファインマン積分の被積分関数の分母の多項式が 0 になることによる発散に対しては、過去の研究で「発散を和らげるためのパラメータを分母に加え多次元数値積分を実行し、外挿法によりパラメータが 0 になるときの極限を求める」という方法で対応した。本研究は、この計算法を拡張し紫外・赤外発散にも適応可能とする。

我々が開発する計算法は、完全に数値的であるため柔軟性が高く、質量のない粒子と質量のある粒子がともに関与する物理プロセスにも対応可能である。しかしながら、トップクォークと電子のように質量差が大変大きい粒子が関与する場合には、計算精度上の課題が発生してくる。また、3 ループ以上のマルチループになると、ダイアグラムのトポロジーが複雑化し、積分の次元数が 10 を超える場合もある。このような多次元では数値積分の計算時間が長大化するという課題も発生してくる。これらの計算遂行上の課題を克服するために、多倍長精度での数値積分の実行や並列化プログラムの開発を行い、性能を向上させていく。これによりファインマン積分の統一的な数値計算法を確立する。

3. 研究の方法

ファインマンパラメータ $\{x_r\}$ 表示のファインマン積分は、分子を 1 とするスカラー積分の場合以下のように与えられる。

$$I = (-1)^N \frac{\Gamma(N - (2 - \epsilon)L)}{(4\pi)^{(2-\epsilon)L}} \int \prod_{r=1}^N dx_r \frac{\delta(1 - \sum x_r)}{U^{2-\epsilon}(V - i\rho)^{N-(2-\epsilon)L}}, V = M^2 - \frac{W}{U}$$

ここで、 L はループの数、 N はループの内線の数、時空の次元 n は $n = 4 - 2\epsilon$ である。紫外・赤外発散のない場合には $n = 4$ ($\epsilon = 0$) として I の有限部分を求める。 U と W は、ダイアグラムのトポロジー、外線の運動量や内線の質量により決められる多項式である。内線の質量は、 M^2 に、外線の運動量は W に係数として含まれる。紫外・赤外発散がない場合でも、積分領域内で被積分関数の分母の V が 0 となる場合があり特異性が現れる。この特異性は、分母の V に挿入された無限小パラメータ i で回避することができるが、そのままでは積分を実行することは困難である。我々は、これまでに「 i 」を有限化し幾何級数的に変化させ、各 i 毎に数値積分を行ない、積分結果の数列 $\{I(i)\}$ を得た後、 $i \rightarrow 0$ としたときの I の極限を外挿により求め I を得る」という手法をプログラム化して数値計算することに成功した (以下では、こ

の方法を直接計算法とよぶ。本研究では、直接計算法を進展させ、紫外発散・赤外発散と有限部分を同時に求める計算法へと改良する。

ファインマン積分 \mathcal{I} は、次元正則化パラメータ ϵ の冪で以下のように展開される。

$$\mathcal{I}(\epsilon) = \frac{c_{-\alpha}}{\epsilon^\alpha} + \dots + \frac{c_{-2}}{\epsilon^2} + \frac{c_{-1}}{\epsilon} + c_0 + c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + \dots, \alpha > 0$$

展開式の ϵ^{-2} や ϵ^{-1} などの負冪の項は $\epsilon=0$ で発散するが、それが紫外・赤外発散にあたる。初項の係数 $c_{-\alpha}$ は、以下に示す2つのステップから数値的に求められる。

ステップ 1	ϵ を有限化し、 $\epsilon_\ell = \frac{\epsilon_0}{(A_c)^\ell}$ ($\ell = 0, 1, \dots$, ϵ_0 は初期値、 $A_c > 1$ は定数) のように幾何級数的に変化させ、 $\epsilon^\alpha \times \mathcal{I}(\epsilon)$ の数値積分を行い、数列 $\{\epsilon_\ell^\alpha \mathcal{I}(\epsilon_\ell)\}$ ($\ell = 0, 1, \dots$) を得る。
ステップ 2	「1.」で得た数列を数値的に外挿し、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限值を求める。これが α 次の発散項の係数 $c_{-\alpha}$ である。

ステップ 1 では、両辺に ϵ^α を乗じ有限項からの展開式とする点が重要である。ステップ 2 で 10^{-6} 程度の誤差で外挿が収束するには、ステップ 1 の各 ϵ での積分結果の誤差が十分小さくなければならない (10^{-12} 程度)。紫外発散に加え被積分関数の分母が 0 になるときの発散には、次元正則化パラメータ ϵ と分母に挿入する i の 2 段階外挿で処理する。

数値積分には QUADPACK (文献 1) と 2 重指数関数型積分法 (文献 2) を用いる。前者は適応型自動積分で積分領域の内部に特異性があっても精度の高い結果が得られる。後者は端点に特異性のある積分に強い。両者とも次元積分として開発されたものであるが、直接計算法では次元積分を繰り返すプロダクト法により多次元積分を実行する。数列の外挿法には、非線形外挿法である Wynn のイプシロン算法 (文献 3) と線形方程式を解く線形外挿法を用いる。

$c_{-\alpha}$ 以降の係数の求め方は、利用する外挿法によって異なる。イプシロン算法の場合には、展開式の両辺に ϵ^α を乗じた後に $c_{-\alpha}$ を引いたものを、 $c_{-(\alpha-1)}/\epsilon^{\alpha-1}$ から始まる展開式として同様に求められる。線形外挿法を用いる場合には、線形方程式を解くことで次項以降の係数も一度に求められる。

4. 研究成果

本研究は、研究代表者 (KEK 湯浅富久子)、研究分担者 1 名 (工学院大 加藤潔)、連携研究者 1 名 (KEK 石川正)、および海外の研究協力者 (Western Michigan 大 E. de Doncker) の 4 名で行った。研究期間に以下の から に示す開発を行い、直接計算法の性能が向上したことを確認した。

紫外発散を有するファインマン積分を次元正則化により数値的に取り扱えるよう直接計算法を改良した。

赤外発散を有するファインマン積分も次元正則化パラメータの符号を $n = 4 + 2\epsilon$ のように反転することで、紫外発散と同様に直接計算法で扱えることを示した。

非線形外挿法に加え線形外挿法の両者を利用可能とする計算プログラムを開発した。

メッセージパッシング並列方式の MPI (文献 4) とマルチスレッド並列方式の OpenMP (文献 5) の二つの並列化手法により直接計算法のプログラムを並列化した。マルチコア計算機で計算し、経過時間の大幅な短縮を実現した。

結果の検証は重要である。3 ループでは、分担者による解析的な結果と比較した。4 ループ以上で内線の粒子が質量を有する場合には、セクター分解の方法 (文献 6) と結果の比較を行った。内線が質量を持たない粒子で構成されている場合には、ヨーロッパの研究グループが導出した解析的な結果と比較した。いずれの場合も、結果が精度良く一致していることを確認した。

まとめとして、直接計算法により計算可能となったスカラーファインマン積分を下表に示す。本研究では、改良した直接計算法で多次元積分の次元が 7 次元以上で、ループ数が 3 ループ以上のファインマン積分 (太字で示す) に取り組み、内線に質量を有する場合と、内線に質量を有しない場合の両者について結果を得た。得られた結果は国内外の研究集会で発表し論文にまとめた。

外線数 ループ数	2 点関数 Self-energy 型	3 点関数 Vertex 型	4 点関数 Box 型	5 点関数	6 点関数
1 ループ	1 次元	2 次元	3 次元	4 次元	5 次元
2 ループ	4 次元まで	5 次元まで	6 次元まで		
3 ループ	7 次元まで	6 次元まで			
4 ループ	11 次元まで				
5 ループ	13 次元まで				

- 文献 2: 高橋、森 数理解析研究所講究録 09 (1974) 721.
- 文献 3: P.Wynn, Math. Tables Automat. Computing 10 (1956) 91-96.
- 文献 4: Message Passing Interface, <https://www.mpi-forum.org/>
- 文献 5: OpenMPI, <https://www.openmp.org/>
- 文献 6: Borowka, S., Heinrich, G., Jahn, S., Jones, S.P., Kerner, M., Schlenk, J., Zirke, T.,
Computer Physics Communications 222, 313-326 (2018)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件／うち国際共著 7件／うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 de Doncker Elise, Yuasa Fukuko, Almulihi Ahmed	4. 巻 75
2. 論文標題 Efficient GPU Integration for Multi-loop Feynman Diagrams with Massless Internal Lines	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Computational and Experimental Simulations in Engineering. ICCES 2019. Mechanisms and Machine Science	6. 最初と最後の頁 737 ~ 747
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-27053-7_62	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kato K, de Doncker E, Ishikawa T, Yuasa F	4. 巻 1085
2. 論文標題 Direct numerical computation and its application to the higher-order radiative corrections	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 052002 ~ 052002
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1085/5/052002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Daisaka H, Nakasato N, Ishikawa T, Yuasa F, Nitadori K	4. 巻 1085
2. 論文標題 A development of an accelerator board dedicated for multi-precision arithmetic operations and its application to Feynman loop integrals II	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 052004 ~ 052004
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1085/5/052004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 de Doncker E, Almulihi A, Yuasa F	4. 巻 1085
2. 論文標題 High-speed evaluation of loop integrals using lattice rules	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 052005 ~ 052005
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1085/5/052005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 De Doncker E, Almulihi A, Yuasa F	4. 巻 1136
2. 論文標題 Transformed Lattice Rules for Feynman Loop Integrals on GPUs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 012002 ~ 012002
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1136/1/012002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 中里直人、台坂博、湯浅富久子、石川正	4. 巻 2018-HPC-167 No.8
2. 論文標題 GooseコンパイラによるPEZY-SC2クラスタ睡蓮2での応用計算	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 情報処理学会研究報告	6. 最初と最後の頁 1-6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 de Doncker E, Yuasa F	4. 巻 108
2. 論文標題 Feynman loop numerical integral expansions for 3-loop vertex diagrams	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Procedia Computer Science	6. 最初と最後の頁 1773 ~ 1782
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.procs.2017.05.253	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 de Doncker E, Yuasa F, Kato K, Ishikawa T	4. 巻 920
2. 論文標題 Numerical integration and extrapolation for finite and UV-divergent 3-loop Feynman integrals	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 012005 ~ 012005
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/920/1/012005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 de Doncker E., Yuasa F., Kato K., Ishikawa T., Kapenga J., Olagbemi O.	4. 巻 224
2. 論文標題 Regularization with numerical extrapolation for finite and UV-divergent multi-loop integrals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Computer Physics Communications	6. 最初と最後の頁 164 ~ 185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cpc.2017.11.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 湯浅富久子
2. 発表標題 素粒子物理学におけるFeynman 積分の数値計算
3. 学会等名 日本応用数理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 湯浅富久子
2. 発表標題 ファインマン積分の数値計算法 : DCMによる電弱高次補正計算II
3. 学会等名 日本物理学会 2018年秋季大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 湯浅富久子
2. 発表標題 マルチスケール・マルチループのファインマン積分の数値計算
3. 学会等名 日本物理学会 第74回年次大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Fukuko Yuasa
2. 発表標題 Efficient GPU Integration for Multi-loop Feynman Diagrams with Massless Lines
3. 学会等名 The International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences (ICCES 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 湯浅富久子
2. 発表標題 Feynman loop numerical integral expansions for 3-loop vertex diagrams
3. 学会等名 The International Conference on Computational Science, ICCS2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 加藤潔
2. 発表標題 Direct numerical computation and its application to the higher-order radiative corrections
3. 学会等名 18th International Workshop on Advanced Computing and Analysis Techniques in Physics Research, ACAT2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 加藤潔
2. 発表標題 数値計算法とその高次輻射補正への応用
3. 学会等名 日本物理学会 2017年秋季大会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 湯浅富久子
2. 発表標題 ファインマン積分の数値計算法：DCMによる電弱高次補正計算
3. 学会等名 日本物理学会 第73回年次大会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

特になし

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	加藤 潔 (Kato Kiyoshi) (50152707)	工学院大学・教育推進機構・名誉教授 (32613)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	Western Michigan University		