

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05567

研究課題名（和文）線形シグマ模型におけるDブレーンの研究

研究課題名（英文）Study of D-Branes in Linear Sigma Models

研究代表者

堀 健太郎（Hori, Kentaro）

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・教授

研究者番号：30535042

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は2次元ゲージ理論を境界を持つ面上に定式化するときの境界条件についてである。超対称性を持つとは限らない一般の理論において、境界自由度のゲージ変換性を決定した。(2,2)超対称理論においてはゲージ群のどの表現が境界上に許されるかを判定する「次数制限則」を見つける方法を開発した。直交群やシンプレクティック群をゲージ群とする超対称QCDにおいては次数制限則がサイバーク双対性と整合的であることを見出した。ゲージ化された線形シグマ模型においては次数制限則はある相から別の相へのDブレーンの輸送則を決定する。本研究により超弦理論の非幾何学相や強結合相におけるDブレーンを調べる有効な方法がもたらされた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子力学と一般相対論を統一的に含む理論の枠組みの最有力候補が『超弦理論』であるが、その研究において過去30年にわたり中心的役割を果たして来たのが「Dブレーン」である。弦理論を研究する従来の方法は時空の曲率が大きくなるに従い量子補正が増大し破綻してしまう。その問題を解決するのが線形シグマ模型である。本研究では線形シグマ模型におけるDブレーンを調べる有効な方法を開発した。それによりこれまで手の届かなかった領域における超弦理論の基本的な理解が得られるようになった。また、Dブレーンは数学的にも興味深い対象であり、本研究は代数幾何学の新しい予想を生み出している。

研究成果の概要（英文）：The present research is on the boundary conditions in two dimensional gauge theories formulated on surfaces with boundaries. For a general theory which is not necessarily supersymmetric, we determined the gauge transformation rule of the degrees of freedom on the boundary. For a (2,2) supersymmetric theory, we developed a method to find the grade restriction rule which determines the allowed representations of the gauge group on the boundary. For supersymmetric QCD with orthogonal or symplectic gauge groups, we found that the rule is consistent with Seiberg duality. For gauged linear sigma models, the rule is applied to determine the rule of D-brane transport along paths from one phase to another. The present research introduces an effective method to study D-branes in nongeometric or strongly coupled phases of superstring compactifications.

研究分野：場の量子論、弦理論

キーワード：線形シグマ模型 ゲージ対称性 境界上の自由度 Dブレーン 次数制限則 サイバーク双対性

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は以下の二つの問いを柱として研究を行っている：「自然界の基本法則はどのようなものか？」「それはどのような数学によって記述されるのか？」自然界の基本法則を記述するために量子力学と一般相対論を統一的に含むような理論的枠組みが求められているが、『超弦理論』はその最有力候補である。超弦理論を根源的に理解すること、その記述に適した数学を探求・開拓すること、は重要である。本研究課題はこのような問題意識を背景として持っている。

## 2. 研究の目的

この研究はゲージ化された線形シグマ模型(GLSM)における D プレーンを解析することにより、これまで手の届かなかった「非幾何学相」や「強結合相」における超弦理論の基本的な理解を目指すものである。具体的にはミラー対称性やサイバーク双対性のもとでの D プレーンの具体的な対応関係を明らかにすること、GLSM における D プレーンの安定性条件を書き下すこと、BPS 状態の数え上げを行い、その漸近的振る舞いを解析することによりブラックホール・エントロピーの微視的理解を目指すこと、さらには 3,4 次元のゲージ理論の双対性のもとでの境界条件の対応関係を明らかにすること、である。

## 3. 研究の方法

研究は日々の思索、それに伴う思考実験や計算、研究仲間との勉強会や議論、セミナーや研究集会への参加・発表に伴う議論、などを組み合わせて行った。科研費は主に、研究者の招聘、国際会議や研究集会への参加のための旅費、研究発表のスライド作成のためのコンピューターの購入、基礎知識の習得のための書籍の購入、に用いられた。

## 4. 研究成果

### (1) 境界上の自由度のゲージ変換性

2次元ゲージ理論を境界を持つ面上に境界上でゲージ対称性を保つように定式化するとき、境界上の自由度はゲージ変換のもとでどのように変換されるか？という問いは基本的かつ重要である。2次元ゲージ理論は「テータ角」と呼ばれるトポロジカルなデータを持つが、それはゲージ群  $G$  の分類空間  $BG$  の  $U(1)$  係数 2 次コホモロジー類と一対一の関係にあり、さらにそれは  $G$  の  $U(1)$  による平坦な中心拡大と一対一の関係にある。境界上の自由度はそのような中心拡大の表現をなす、というのが上記の問いへの答えである。これは短く「境界上の自由度はゲージ群の平坦射影表現でテータ角と適合するものをなす」ということも出来る。これは  $G$  が有限群の場合に知られていたこと、すなわち「2次元オービフォールド理論における境界上の自由度はオービフォールド群の射影表現で離散トーシオンと適合するものをなす」を一般のコンパクト・リー群  $G$  へ拡張したものを与えている。

### (2) 次数制限則

2次元(2,2)超対称ゲージ理論において超対称性の半分を保つ境界条件には A タイプと B タイプの 2 種類あるが、そのうち B タイプの境界条件は境界上でゲージ対称性を保つようにすることができる。(1)の結果によれば境界上の自由度はゲージ群のテータ角と適合する平坦射影表現(以下、簡単のため単に「表現」と表す)をなす。一方、2次元(2,2)超対称ゲージ理論はゲージ場の超対称パートナーとしてスカラー場を持ち、それが赤外発散の問題を引き起こす可能性がある。平面上で定式化したときに赤外発散のない「正則な」理論のみが健全な理論であり、考察の対象である。ところが、理論を境界を持つ面上に定式化するとき、境界上の表現によっては理論の正則性を損なうことが起こりうる。「どの表現が正則性を保つのか？」を判定するのが「次数制限則(grade restriction rule)」である。次数制限則が何であるかはゲージ群が可換群のときは既知だが非可換群の場合には分かっていない。本研究では半球面上の分配関数の積分表示が収束する条件からこれを決定する方法を開発し、いくつかの重要な場合に適用した。

#### (2-1) 物質場が対称の場合 - サイバーク双対性への応用

物質場が「対称」なとき、即ち、物質表現においてウェイトの集合が  $-1$  倍のもとで不変なとき、半球面分配関数の収束条件は簡単な形となり、次数制限則を簡潔な形で表すことに成功した。それは数学者の Spenko と Van den Bergh が「商特異点の非可換クレパント解消」として提

唱した表現の集合と一致することもわかった。ゲージ群が直交群もしくはシンプレクティック群で物質場がベクトル表現の直和をなす超対称 QCD は「対称」な理論の例である。この場合、次数制限則は表現を指定するヤング図の横幅に上限を与えるものである。超対称 QCD に対しては研究代表者によりサイバーグ双対性が提唱されているが、次数制限則により許される表現の集合はサイバーグ双対性のもとでヤング図の転置により一対一に対応することがわかった。この結果はサイバーグ双対性を支持するものであると同時に双対性のもとで境界条件がどのように対応するかを調べる出発点を与えるものである。

## (2-2) 線形シグマ模型への応用

(Richard Eager, Johanna Knapp, Mauricio Romo との共同研究)

ゲージ群が  $U(1)$  因子を持つ線形シグマ模型は「FI パラメーター」と呼ばれる結合定数を持ち、そのパラメーター空間はゲージ対称性の破れのパターンによりいくつかの「相」に分割される。ゲージ対称性が全て破れる「弱結合相」は解析が簡単で、滑らかな多様体をターゲットとする非線形シグマ模型に低エネルギーで落ち着くことがしばしばある(「弱結合幾何学相」)。連続的ゲージ対称性が破れずに残る配位を持つ「強結合相」の解析は一般には困難である。また、異なる相の間の「相境界」においても連続的ゲージ対称性が破れずに残る配位があり、理論は強結合的である。上記の赤外発散の問題は、このような強結合的状況において非自明である。したがって境界上の自由度に対する次数制限則は強結合相や相境界において最も重要である。FI パラメーターとテータ角を合わせた空間においては異なる相の間を理論の正則性を保ちつつ道で結ぶことが出来、そのような道に沿っての次数制限則を決定することが問題となる。それが分かれば  $D$  プレーンが道に沿ってどのように輸送されるのかがわかることになる。また、一つの道で別の相に行き異なるホモトピー類に属する道で戻ること、閉じた道に沿って  $D$  プレーンがどのように変わるかを定めるモノドロミーもわかるようになる。非可換なゲージ群を持つ一つの面白い模型として「Rodland 模型」がある。これは強結合であるにもかかわらず低エネルギーで非線形シグマ模型に落ち着く「強結合幾何学相」と通常の弱結合幾何学相の二つの相を持つ。二つの相は相異なるカラビ・ヤウ多様体に対応する。この研究ではこの模型において半球面分配関数の収束条件を調べることにより二つの相を結ぶ道に沿っての次数制限則を決定した。これにより  $D$  プレーンの輸送則が決定され、その結果二つのカラビ・ヤウ多様体の導来圏の圏同値が定まる。これは代数幾何学において "Pfaffian/Grassmannian correspondence" として注目されている。二つの相を結ぶ道のホモトピー類は 4 種類存在し、対応して 4 種類の圏同値が定まる。このうち 2 種類は数学において既に証明されているものだが残りの 2 種類は新しいものである。これらをフルに使って、FI テータ空間の 3 個の特異点(理論が正則でなくなる点)の周りのモノドロミーを幾何学的に表すことが出来た。これは基点を弱結合相に置くもので、それぞれ階数 1, 2, 3 のベクトル束による Seidel-Thomas ツイストである。Rodland 模型にはサイバーグ双対理論、「双対 Rodland 模型」が存在する。また、弱結合幾何学相と強結合幾何学相を共に持つ別の線形シグマ模型として「Miura 模型」ある。この研究で開発した方法を適用し、これらにおいても相の間を結ぶ道に沿っての次数制限則を決定することが出来た。特に、双対模型における結果により、Rodland 模型の強結合相を基点とするモノドロミーを幾何学的に表すことが出来た。3 個の特異点を上と同じ順序とすると、それぞれ階数 5, 4, 1 のベクトル束による Seidel-Thomas ツイストである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 12件）

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 Grade restriction rule in the Rodland model and its dual
3. 学会等名 Geometry of GLSMs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 Introduction to 2d (2,2) supersymmetric gauged linear sigma models
3. 学会等名 2D Supersymmetric Theories and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 Grade restriction rule and applications
3. 学会等名 2D Supersymmetric Theories and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 Grade restriction rule and its applications
3. 学会等名 GLSMs -- 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 Grade Restriction Rule from Hemisphere
3. 学会等名 The Geometry and Algebra of Landau-Ginzburg Models (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 3D Mirror Symmetry
3. 学会等名 An introductory workshop to 3D mirror symmetry and AGT conjecture (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 Mirror Symmetry from 3d to 2d: non-Abelian case
3. 学会等名 Workshop on 3d Mirror Symmetry and AGT Conjecture (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Hori
2. 発表標題 Seiberg duality and its consequences
3. 学会等名 Geometry and Everything, Fukaya 60 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 堀健太郎
2. 発表標題 2d Seiberg duality, with boundary
3. 学会等名 Flat Connections in Physics and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 堀健太郎
2. 発表標題 Boundary conditions in 2d (2,2) gauge theories
3. 学会等名 String Math 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 堀健太郎
2. 発表標題 Grade restriction rule for QCD with symmetric matters
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry V (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 堀健太郎
2. 発表標題 Mirror Symmetry - from 3d to 2d
3. 学会等名 Mirror Symmetry and Related Topics 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------