

令和 3 年 6 月 15 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05588

研究課題名(和文) 等質量3体平面舞踏解の新しい構成法

研究課題名(英文) A new approach to construct planar equal-mass three-body choreographic solutions

研究代表者

尾崎 浩司 (Ozaki, Hiroshi)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：00407991

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 強力ポテンシャル下の等質量3体平面舞踏解の近似解をヤコビの楕円関数から構成することができた。(2) 等質量3体平面舞踏解は全角運動量がゼロになる特徴をもつが、3体の座標と三接線交点の軌跡の関係式を得た。(3) べき型ポテンシャルとレナード-ジョーンズポテンシャル下の等質量3体平面舞踏解から分岐する周期解を作用積分の変分の2次の項に現れるヘッセ行列の固有値問題の固有関数と捉え、モース指数の変化が、舞踏解に分岐が起きるための必要十分条件であることを突き止めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

三つの恒星が互いの重力で引き合いながら運動している恒星系が最近見つかりました。「三体の初期位置と初速度を与えたとき、三体のニュートンの運動方程式を解析的に解きなさい」という問題を「三体問題」と言います。三体問題は正攻法では解けないのですが、特解として直線解、正三角形解、8の字解の3つが知られています。3番目だけは、三体の質量がすべて等しい、という仮定が必要ですが、それでも手で解くことはできていません。高精度数値解がわかっているだけです。この研究では、謎の8の字解析解に手計算で挑みました。解くことはできませんでしたが、手で解くためのヒントをいくつか得ることができました。

研究成果の概要(英文)：(1) We constructed an approximated choreographic solution of the planar equal masses three-body problem under the strong potential with Jacobian elliptic function. (2) We found a relation between three-body positions and the orbit function of the intersection point of three tangent lines from the three bodies with zero total angular momentum. (3) We found that change of the Morse index is not only necessary but also sufficient condition for bifurcations from the choreographic motion of equal mass three bodies under homogeneous potential, and Lenard-Jones type potential. The bifurcated periodic solutions are constructed with eigenfunctions belonging to zero eigenvalues under the eigenvalue problem of the Hessian, which is the second variation of the action integral.

研究分野：数理物理

キーワード：三体問題 等質量3体8の字解 運動量保存則 角運動量保存則 エネルギー保存則 モース指数 分岐解

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 等質量平面 3 体問題に 8 の字舞踏解が存在することがシェンシネ-モンゴメリーによって証明されたのが 2000 年である。しかし、いまだに解析解は得られておらず、等質量 3 体 8 の字解の全貌は明らかになっていない。こうした中、2014 年に松田(東海大)は、重心原点で全角運動量ゼロを満たす周期  $\pi$  の等質量 3 体 8 の字舞踏解析解が満たすべき構造を調べ、重力ポテンシャルの詳細によらず、8 の字解析解は 2 つの周期関数(一方が  $\pi/2$  時間が経つと符号を変える偶関数で、もう一方が  $\pi/6$  を周期にもつ偶関数)で記述されることを示した。松田は、さらに、任意のべき型引力ポテンシャルの場合、等質量 3 体の運動方程式から  $\pi/6$  を周期にもつ偶関数がベルヌーイの微分方程式を満たすこと、また、 $\pi/6$  を周期にもつ偶関数が  $\pi/2$  を周期にもつ偶関数によって決定されることまでも明らかにした。松田によって、等質量 3 体の運動方程式は  $\pi/2$  を周期にもつ偶関数が満たす関数方程式に読み替えられることが示され、その方程式を解くことが等質量 3 体 8 の字解析解を得ることと同値であることがわかった。この一連の等質量 3 体 8 の字舞踏解析解の構成法を「松田の構成法」と呼ぶ。

(2) 質点間の距離の 2 乗に反比例する強力ポテンシャル下の 8 の字解は、重心位置が原点に保存かつ全角運動量がゼロで保存する性質をもつことに加え、慣性モーメントが保存するという他の 8 の字解にはない性質を持っている。「強力ポテンシャル下の等質量 3 体 8 の字運動では、解析解が求まるかもしれない」と期待が高まっていた。

(3) 藤原らは、3 体間のポテンシャルの詳細や 3 体の質量に関係なく、重心位置が原点に保存され全角運動量がゼロに保存される平面 3 体運動では、3 体の位置で引いた接線が 1 点で交わるという三接線定理を 2003 年に証明した。ただし、三接線が 1 点で交わるということがわかって、その交点の軌道は、8 の字軌道と同様、皆目見当がつかない状況である。三接線交点の軌道と 8 の字軌道と一緒に絞り込む手立てが必要になっている。

## 2. 研究の目的

(1) 松田の構成法の鍵を握る  $\pi/2$  時間が経つと符号を変える偶関数で、特に強力ポテンシャル下の 8 の字舞踏解へと結びつくものを求めることを当初の目的とした。

(2) ベルヌーイのレムニスケート上の等質量 3 体舞踏運動では三接線交点の軌道が直角双曲線になることを、ベルヌーイのレムニスケートの軌道方程式と重心位置が原点で保存し、全角運動量ゼロで保存という性質だけから導き、そこから他の 8 の字軌道と三接線交点の軌跡の関係を明らかにすることも目的である。

(3) ベルヌーイのレムニスケート上の等質量 3 体 8 の字舞踏解析解を除くと、現状では数値解は得られているものの、解析的な解は見つかっていない。松田の構成法に基づいて、特定の引力ポテンシャルで新たな解析解が一つでも構成できれば、他の引力ポテンシャル下の等質量 3 体 8 の字舞踏解析解へ至るより具体的な攻略方法が見えてくるはずである。

したがって、数値解から脱却し、何かしらの具体的な新しい解析解を得ることが目的に含まれる。

(4)変分原理に基づく数値解析によると、3体間のポテンシャルの次数をパラメーターにして次数を連続的に変化させてゆくと、作用積分は等質量3体8の字舞踏解で極小値を持つだけでなく、その周辺にも解があることがわかる。さらに調べると、ある次数で解の分岐が見えてくる。矢ヶ崎氏(京都大)から「この分岐は、モース指数と呼ばれる不変量と関連が付くはずである」との指摘を受け、藤原・福田両氏(北里大)が、べき型引力ポテンシャルとレナード=ジョーンズポテンシャルで解の分岐にモース指数を関連付ける研究を始めた。そこで、彼らに合流し、等質量3体8の字舞踏解の分岐とモース指数の対応も視野に入れることとなった。

### 3. 研究の方法

(1) を等質量3体の8の字運動の周期とするとき、 $T/2$ 時間が経つと符号を変える偶関数として誰でもすぐ思いつく関数に、三角関数  $\cos(t)$  とヤコビの楕円関数  $\text{cn}(t; k^2)$  がある。前者の場合は松田によって詳しく調べられた。重心原点、全角運動量ゼロの8の字軌道は得られるものの、8の字の2枚の葉っぱの形が端に届く前に急速にすぼまる疑似8の字解に至ることがわかっている。後者では、特に母数  $k^2 = (2 + \sqrt{3})/4$  の場合に、ベルヌーイのレムニスケート上の等質量3体舞踏解析解が得られる。この特定の母数から一般の母数へ拡張することができると、べき型引力ポテンシャル下の等質量3体8の字舞踏解析解のシリーズが見えてくると期待される。

(2)等質量3体8の字解が描く軌道上で3体から引いた三接線の軌道方程式を2変数関数  $g(x, y) = 0$  とおき、この関数が表す曲線上の1点の座標を  $(x_c, y_c)$  とする。この点での接線がベルヌーイのレムニスケートと交わる2点をA, Bとする。A, Bともにベルヌーイのレムニスケート上の点であるから、どちらの座標も  $(X_A, Y_A) = (X_A, c_A X_A)$ ,  $(X_B, Y_B) = (X_B, c_B X_B)$  と表せる。ここで  $c_i$  はy座標とx座標の比を表し、勾配関数と呼ぶ ( $i = A, B$ )。これをベルヌーイのレムニスケートの軌道方程式  $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$  に代入することで  $(X_i, Y_i)$  を勾配関数  $c_i$  で表すことができる。これを使って、三接線交点の軌跡に迫る。

(3)ベルヌーイのレムニスケートが等質量3体の軌道であるとすると、等質量3体の運動方程式を満たすポテンシャルは、対数型引力ポテンシャルに斥力ポテンシャルを加えた人工ポテンシャルであることは、藤原らによって既に2003年に示されている。対数型引力ポテンシャルが背景にあるのは偶然とは思えない。ベルヌーイのレムニスケートを変形するパラメーターとして適切なものを見いだせれば、2次元重力下の等質量3体問題の8の字解析解が得られるものと期待される。

(4)作用積分の第2変分に現れるヘッセ行列の固有値のうち、特に負の固有値の個数をモース指数と呼ぶ。このモース指数は、べき型ポテンシャル下の等質量平面3体問題における8の字舞踏解から分岐する周期解を知る上で、大切な役割を演じると期待される。ヘッ

セ行列の固有関数は 8 の字解から分岐する周期解を与えるので、周期を定めた上でフーリエ級数展開すれば、等質量平面 3 体問題に一連の数値解(近似解)を見出せる。この前段階の研究を福田、藤原両氏と行っており、今回も彼らに合流することになった。

#### 4. 研究成果

(1) 松田によれば、重心を原点に保ち、全角運動量をゼロに保つ等質量平面 3 体問題の 8 の字舞踏解析解(周期 )は、半周期で符号を変える偶関数  $c(t)$  (三体の  $y$  座標と  $x$  座標の比なので勾配関数と呼ぶ)が鍵を握っている。任意の母数  $k^2$  をもつヤコビの楕円関数  $\text{cn}(t; k^2)$  は半周期で符号を変える偶関数なので、 $c(t)$  の候補になり得るが、そのままでは全角運動量をゼロにならない。そこで、任意の母数  $k^2$  の場合の  $\text{cn}(t; k^2)$  と周期  $\omega/3$  の補正関数  $\varepsilon(t)$  の線型結合で  $c(t)$  を定め、全角運動量がゼロの系が得られるようにした。特に母数  $k^2 = (2 + \sqrt{3})/4$  のとき、藤原らのレムニスケートの結果が再現された。

今回得られた補正関数を伴う勾配関数  $c(t)$  を使って、強力ポテンシャル下の等質量 3 体 8 の字解析解に相当するであろう解候補を構成した。8 の字軌道は、原点付近の漸近線の勾配と二等辺三角形配置における 2 体の勾配の絶対値に特徴が現れる。そこで

$$\frac{y_2(0)/x_2(0)}{y_2(\omega/12)/x_2(\omega/12)} = \frac{\text{cn}(\omega/3; k^2) + \varepsilon(0)}{\text{cn}(5\omega/12; k^2)}$$

において、左辺を藤原が 2016 年に高精度数値計算(40 桁)で得た強力ポテンシャル下の等質量 3 体 8 の字数値解に合わせて、母数  $k^2$  を探した。 $k^2 = 0.95927229764518 \dots$  のとき、時刻 0 で解候補は数値計算による初期条件に一致する。この母数を使って解候補から軌道を描き、数値解による軌道も一緒に描くと、全軌道表示ではコンピューター画面で両者はピタリと一致して見えた。しかし、部分的に拡大すると数値軌道と解候補が描く軌道は最大で 7/1000 程度異なっていた。また一定になるはずの慣性モーメントも、解候補では一定値を中心に小さく変動していることがわかった。高精度数値計算の精度に比べて、解候補と数値解との相対誤差の方が桁違いに大きい結果であり、解候補はまだ近似解にすぎないと結論づけた。ただし、近似解に到達したということは、今回のアプローチに致命的な誤りはないことを意味する。

(2) ベルヌーイのレムニスケート上の等質量 3 体 8 の字舞踏解析解の場合、三接線交点の軌道方程式は、直角双曲線になることが二通りのやり方で証明されている。一つは Mathematic に楕円関数の諸公式を与えながら力尽くの計算をさせるやり方である。もう一つは、代数幾何学的考察に背理法を取り入れて証明するやり方である。しかし、もしも新たに 8 の字解析解と 8 の字の軌道方程式が見つかったとしても、二つの証明法では三接線交点の軌道方程式を知ることは困難であると考えられる。そこで重心原点、全角運動量ゼロになる任意の 8 の字軌道にも適用できるような、見通しの良い証明法を探った。手応え

ありと感じたのは、三接線交点の軌道上の1点で接線を引く手法である。その接線が8の字軌道と交わる座標に注目するとき、形式的ではあるが8の字軌道関数と三接線の軌道方程式を結びつけることができた。試しにベルヌーイのレムニスケートの場合、三接線交点が直角双曲線になることを示そうとした。ところが、三接線交点が直角双曲線であるための十分条件が得られただけで、証明には至らなかった。既知の二つの証明法では、十分条件が入り込む余地などまったくないことはわかっている。証明法を替えた途端に十分条件が生じた理由は、未だにつかめていない。このようにベルヌーイのレムニスケートの場合ですら、三接線交点の軌道方程式を特定する見通しのよい証明法を与えることができず、完全に行き詰まってしまった。

(3) (1)に述べた補正関数付きの勾配関数は、実は実数倍の不定性が残されている。その実数をパラメータとして動かすと、8の字を変形した軌道が現れた。パラメータをある範囲に絞ると、疑似8の字の軌道が得られた(図1)。片葉が潰れた軌道で、対数ポテンシャル下の高精度数値解に一致するものは得られなかったが、「軌道の変形」という新しい手法に基づき、今後も等質量3体8の字舞踏解析解の導出にチャレンジしていきたい。

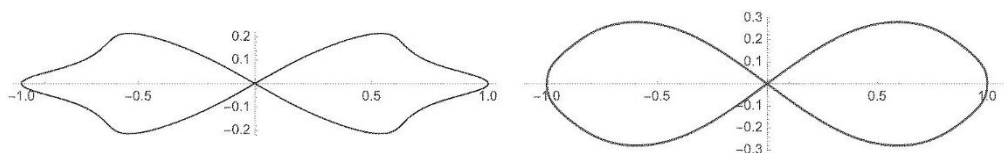


図1. パラメータによる8の字軌道の変形

(4)等質量3体平面舞踏解から分岐する周期解とモース指数の関連性を、べき型引力ポテンシャルとレナード-ジョーンズポテンシャルの場合について福田,藤原 両氏とともに調べた。モース指数は舞踏解の分岐点で変化し、すべての分岐解は、モース指数の変化にあわせてヘッセ行列の0固有値に属する固有関数で近似されることがわかった。逆に、べき型引力ポテンシャルとレナード-ジョーンズポテンシャル下の等質量3体平面8の字舞踏解に対して、ポテンシャルの次数をパラメータに対するモース指数の応答を調べると、モース指数が変化するパラメータの値で8の字舞踏解に分岐が起きることが数値的に確かめられた。つまり、数値解析する限り、モース指数の変化が、8の字舞踏解に分岐が起きるための必要十分条件である。さらに、相似形軌道になる解をすべて同じ解と見なせば、モース指数の変化は、分岐解の個数に一致する。以上の研究成果を共著で論文発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fukuda Hiroshi, Fujiwara Toshiaki, Ozaki Hiroshi	4. 巻 52
2. 論文標題 Morse index and bifurcation for figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 185201 ~ 185201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ab1270	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H
2. 発表標題 Bifurcation of Simo H solution bifurcated from figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem
3. 学会等名 天体力学N体力学研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Fujiwara T, Fukuda H, Ozaki H
2. 発表標題 Variational principle for bifurcation in Lagrangian mechanics
3. 学会等名 天体力学N体力学研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤原俊朗, 福田宏, 尾崎浩司
2. 発表標題 変分原理の周期解分岐への応用
3. 学会等名 日本応用数理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Fujiwara T, Fukuda H, Ozaki H
2. 発表標題 Bifurcations from the Figure-eight solution/bifurcation
3. 学会等名 Celestial Mechanics and Beyond (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤原俊朗, 福田宏, 尾崎浩司
2. 発表標題 三体8の字解と, それから分岐する解の線形安定性
3. 学会等名 応用数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H
2. 発表標題 Periodic solutions around figure-eight choreography for the equal mass three-body problem
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications AIMS 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Fujiwara T, Fukuda H, Ozaki H
2. 発表標題 Linear Stability and Morse Index for the Figure-Eight and K=5 Slalom Solutions under Homogeneous Potential
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications AIMS 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------