

令和 3 年 6 月 13 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K12642

研究課題名(和文) 包括的グレブナー基底系による限量子消去の効率化

研究課題名(英文) Making a quantifier elimination method based on the theory of comprehensive Groebner systems more efficient

研究代表者

深作 亮也 (Fukasaku, Ryoya)

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：40778924

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：限量子消去法は与えられた一階述語論理式と等価で、限量子がついた変数を含まない論理式を計算する。本研究課題では等式制約を多く含む一階述語論理式に対する限量子消去を効率化するため「包括的グレブナー基底系による限量子消去法」の効率化を目指し、パラメータを含む零次元飽和イデアル計算を効率化する手法を提案し、パラメータを含む零次元根基イデアルのエルミート二次形式を零次元イデアルの計算なしで計算する手法を提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一階述語論理式の記述能力は高く、数学だけでなく物理・工学などで発生する多くの数理問題や数理モデルを正確に表現できる。そうした一階述語論理式から、限量子を消去した、等価な論理式を計算する限量子消去法は、数理問題や数理モデルに対する正確かつ簡略化された表現を与え、問題やモデルの本質を明らかにする。等式制約は不等式制約に比べて強い制約を持っていることから数理問題や数理モデルの本質となっている場合も多いため、等式制約の多い一階述語論理式に対する効率化は重要である。

研究成果の概要(英文)：We can compute formulas without quantified variables which is equivalent to given first order formulas by using quantifier elimination methods. In order to make quantifier elimination for first order formulas containing many equalities more efficient, we have tried to make a quantifier elimination method based on the theory of comprehensive Groebner systems more efficient. We proposed a method for efficiently computing parametric zero-dimensional saturation ideals, and a method for computing Hermitian quadratic forms of parametric zero-dimensional radical ideals without computing such ideals.

研究分野：計算機代数

キーワード：限量子消去 包括的グレブナー基底系 パラメータ付き多項式イデアル 計算機代数 数式処理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

一階述語論理式の数学的記述能力は非常に高く、物理・工学などで発生する多くの数理問題や数理モデルを正確に表現できる。そうした記述能力の高い一階述語論理式から、限量子を消去した、等価な論理式を計算する限量子消去法は、そうした数理問題や数理モデルに対する正確かつ簡略化された表現を与え、問題やモデルの本質を明らかにする。

限量子消去法のメインストリームとしては円柱的代数分解による手法が広く知られている。また、限量子のついた変数に関して低次の多項式制約を持つ一階述語論理式に対する手法として仮想代入法なども知られている。包括的グレブナー基底系による限量子消去法は 1998 年に提案されていたものの、当時は包括的グレブナー基底系の計算が簡単ではなかった。しかし、2006 年に Suzuki-Sato アルゴリズムが提案され、それは包括的グレブナー基底系計算のブレイクスルーとしても知られており、その提案以降、様々なそのアルゴリズムの改良が達成された。

そうした包括的グレブナー基底系計算手法の成果を取り入れ、また、いくつかの改良を加えたことによって、本研究課題に取り組み始めた 2017 年当初、包括的グレブナー基底系による限量子消去法は等式制約を多く含む一階述語論理式に対して効率的な手法であることが認知され始めてきていた。本研究課題では包括的グレブナー基底系による限量子消去法の更なる効率化を目指し、そして、等式制約を多く含む一階述語論理式に対する唯一無二の手法としての地位を確固たるものとすることを目指してきた。

2. 研究の目的

本研究課題で扱う限量子消去法は、包括的グレブナー基底系の理論を利用することによって

$$\exists(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n (\bigwedge_{f \in F} f = 0) \wedge (\bigwedge_{h \in H} h > 0)$$

のような形を持つ一階述語論理式を入力として仮定する、ここでは $F, H \subset \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_n]$ である。そして、アルゴリズムの中では、限量子がついた変数 x_1, \dots, x_n を含む等式制約 $\bigwedge_{f \in F} f = 0$ の構造が代数的に(記号的に)解析される。そして、それはパラメータ(一階述語論理式の用語としては自由変数と呼ばれることが多い) a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ の解析に他ならない。パラメータ a_1, \dots, a_m の値の振る舞いによっても表現は変化するが、等式制約が簡略であれば、そのイデアルも簡略になり、本研究課題の限量子消去法の効率化にも繋がる。本研究課題では次の視点に着目することで包括的グレブナー基底系による限量子消去法の効率化を目指し、本研究課題で得られた成果を限量子消去パッケージ CGSQE に実装してきた。限量子消去パッケージ CGSQE は研究代表者らが開発・公開してきたパッケージであり、数式処理システム Maple で動作するパッケージである。

- (1) パラメータ a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ に対する飽和イデアル $\langle F \rangle : (\prod_{h \in H} h)^\infty$
包括的グレブナー基底系による限量子消去法はパラメータ a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ が零次元イデアルでない場合、限量子がついた変数 x_1, \dots, x_n の一部をパラメータと見なすことで零次元イデアルを考える。イデアルが零次元の場合、飽和イデアル $\langle F \rangle : (\prod_{h \in H} h)^\infty$ によって、等式制約多項式 F の共通根から不等式制約多項式 H の根を完璧に取り除いた等式制約を考えることができ、より簡略な等式制約を考えることができる。しかしながら、その手続きに計算時間・計算空間などの計算機資源が膨大に費やされることもあった。本研究課題では如何にその手続きを効率化するかということに着目した。
- (2) パラメータ a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ に対する根基イデアル $\sqrt{\langle F \rangle}$
根基イデアル $\sqrt{\langle F \rangle}$ は、等式制約多項式 F を、重複根を持たないような等式制約多項式 F' に変形することができる。しかしながら、この計算も、飽和イデアル同様、計算機資源が膨大に費やされることもある。本研究課題では根基イデアルの計算なしで、重複根を持たないような等式制約多項式 F' を利用した場合と同じような表現を得られる方法がないかということについて模索した。

3. 研究の方法

包括的グレブナー基底系による限量子消去法ではエルミート二次形式と呼ばれる対称行列を構成する。本研究課題では研究の目的の着目点にエルミート二次形式の構造からアプローチした。

- (1) パラメータ a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ に対する飽和イデアル $\langle F \rangle : (\prod_{h \in H} h)^\infty$
エルミート二次形式によって等式制約多項式の複素数根と実数根に関する代数的な解析を行うことができる。限量子を消去する手順では実数根に関する代数的な解析から計算がなされるが、飽和イデアルを効率的に計算するために複素数根に関する代数的な解析も利用することにした。
- (2) パラメータ a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ に対する根基イデアル $\sqrt{\langle F \rangle}$
等式制約多項式のイデアルが根基でない場合、エルミート二次形式には不要な情報が含まれてしまう。パラメータを含まない場合は、その計算時間への影響は小さい。しかし、包括的グレブナー基底系による限量子消去法は、限量子がついた変数 x_1, \dots, x_n の一部をパラメータと見なすことで零次元イデアルを考えるので、限量子を再帰的に消去する。そして、

エルミート二次形式が複雑な場合には、エルミート二次形式によって計算される、限量子の一部を消去した論理式が複雑化し、再帰的な呼び出しにおける計算時間にも大きな影響を与えるので、エルミート二次形式の不要な情報を排除する方法を模索した。

4. 研究成果

上の項目で述べた方法から次の成果を得ることができた。

- (1) パラメータ a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ に対する飽和イデアル $\langle F \rangle: (\prod_{h \in H} h)^\infty$
エルミート二次形式の複素数根に関する代数的な解析も利用し、飽和イデアルの計算が不要な場合の条件を構成した。そして、その計算が必要な場合はパラメータだけの等式制約を生成されるので、パラメータ付きイデアルの表現は簡素化され、飽和イデアルの計算も効率化した。
- (2) パラメータ a_1, \dots, a_m を含むイデアル $\langle F \rangle$ に対する根基イデアル $\sqrt{\langle F \rangle}$
エルミート二次形式の重複根に関する情報を排除するための手法を提案した。また、この手法の提案に関連して、零次元イデアルの共通根の連続性に関する結果も示すことができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Ryoya Fukasaku, Hidenao Iwane, Yosuke Sato	4. 巻 13 (1-2)
2. 論文標題 On Multivariate Hermitian Quadratic Forms	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematics in Computer Science	6. 最初と最後の頁 79-93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11786-018-0387-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yosuke Sato, Hiroshi Sekigawa, Ryoya Fukasaku, Katsusuke Nabeshima	4. 巻 11989
2. 論文標題 On Parametric Border Bases	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences - 8th International Conference, MACIS 2019, Gebze, Turkey, November 13-15, 2019, Revised Selected Papers. Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 10-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-43120-4_2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sato Yosuke, Fukasaku Ryoya, Sekigawa Hiroshi	4. 巻 -
2. 論文標題 On Continuity of the Roots of a Parametric Zero Dimensional Multivariate Polynomial Ideal	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 2018 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation	6. 最初と最後の頁 359 - 365
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3208976.3209004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Fukasaku Ryoya, Sato Yosuke	4. 巻 10693
2. 論文標題 On Real Roots Counting for Non-radical Parametric Ideals	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences - 7th International Conference, MACIS 2017, Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 258 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-72453-9_18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Matsuzaki, Hidenao Iwane, Munehiro Kobayashi, Yiyang Zhand, Ryoya Fukasaku, Jumma Kudo, Hirokazu Anai, and Noriko H. Arai	4. 巻 31 (3)
2. 論文標題 Can an A.I. win a medal in the mathematical olympiad? Benchmarking mechanized mathematics on pre-university problems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 AI Communications	6. 最初と最後の頁 251-256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/AIC-180762	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岩根 秀直, 深作 亮也, 佐藤 洋祐	4. 巻 2019
2. 論文標題 不等式制約をもつ論理式に対する包括的グレブナー基底系を利用した限量記号消去の出力の簡単化	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 pp.124-142
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 深作 亮也, 岩根 秀直, 佐藤 洋祐	4. 巻 2019
2. 論文標題 飽和イデアル計算なしのCGS-QE	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 pp.113-123
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yosuke Sato and Ryoya Fukasaku	4. 巻 -
2. 論文標題 On Possible Use of Quantifier Elimination Software in Upper Secondary Mathematics Education	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the 22nd Asian Technology Conference in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Yosuke Sato, Hiroshi Sekigawa, Ryoya Fukasaku, Katsusuke Nabeshima
2. 発表標題 On Parametric Border Bases
3. 学会等名 Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences - 8th International Conference, MACIS 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 深作亮也
2. 発表標題 実数量子消去とその応用について
3. 学会等名 応用特異点論研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 深作亮也
2. 発表標題 根基イデアルに対するエルミート二次形式について
3. 学会等名 日本数式処理学会第26回大会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryoya Fukasaku and Hidenao Iwane
2. 発表標題 On multivariate Hermitian quadratic forms
3. 学会等名 23rd Conference on Applications of Computer Algebra (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 深作亮也
2. 発表標題 CGBとCGSの入門
3. 学会等名 平成29年度RIMS共同研究(グループ型) 数式処理の新たな発展 - その最新研究と他分野との連携 -
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 深作亮也
2. 発表標題 パラメータ付き非根基イデアルに対するエルミート二次形式について
3. 学会等名 平成29年度RIMS共同研究(グループ型) 数式処理の新たな発展 - その最新研究と他分野との連携 -
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryoya Fukasaku and Yosuke Sato
2. 発表標題 On Real Roots Counting for Non-radical Parametric Ideals
3. 学会等名 7th International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yosuke Sato and Ryoya Fukasaku
2. 発表標題 On Possible Use of Quantifier Elimination Software in Upper Secondary Mathematics Education
3. 学会等名 the 22nd Asian Technology Conference in Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yosuke Sato, Ryoya Fukasaku and Hiroshi Sekigawa
2. 発表標題 On continuity of the roots of a parametric zero dimensional multivariate polynomial ideal
3. 学会等名 the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

限量子消去プログラムCGSQE公開ページ http://www.rs.tus.ac.jp/fukasaku/software/CGSQE-2018/

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------