

令和 3 年 5 月 22 日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K12645

研究課題名(和文)凸最適化問題に対する問題構造を利用した効率的な劣勾配アルゴリズムの構築

研究課題名(英文)Development of efficient subgradient methods for convex optimization exploiting the problem structure

研究代表者

伊藤 勝 (ITO, Masaru)

日本大学・理工学部・助手

研究者番号：90778375

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：大規模な凸最適化問題の解を計算することは、機械学習やデータマイニングなどの応用において急速に需要が高まっており、効率的な求解アルゴリズムの開発が重要である。本研究はこの問題に対する一次法というアルゴリズムについて、問題構造のパラメータが未知である場合にも効率的な性能を発揮する最適化手法を確立した。特に最小化したい目的関数がエラーバウンドという一般性の高い条件を満たす場合は、問題の構造を記述するパラメータが複雑となるが、本研究ではこれらのパラメータが予め分かっている場合でも少なくとも準最適な計算量で近似的な解が求められる一次法を構築した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で確立した一次法のアルゴリズムは、次の三つの観点から実用性・汎用性が高く、幅広い応用が期待される。まず一つ目に、本研究が対象としたエラーバウンドといった問題構造は一般性が高く、この性質が認められる応用問題が数多く存在する。二つ目に、確立したアルゴリズムは、問題構造に関するパラメータが予めわかっていない場合でも、その構造に対して知られている限界の計算量からたかだか対数倍の計算量を保証するため、汎用性が高い。三つ目に、本研究の提案手法は理論保証を持つ計算可能な停止条件を兼ね備えるため、高い実用性が期待される。

研究成果の概要(英文)：The development of algorithms of solving large-scale convex optimization problems is an important topic which has many applications in machine learning and data mining and so on. This research focused an effective candidate, the first-order methods, for this problem and we established first-order methods which provide efficient performance even if the parameters on the problem structure is unknown in advance. In particular, in the case when the objective function satisfies an error bound condition, we established adaptive first-order methods which ensures nearly-optimal complexity to obtain an approximate solution.

研究分野：最適化理論

キーワード：数理最適化 凸最適化問題 一次法 加速勾配法 エラーバウンド 計算量

1. 研究開始当初の背景

凸最適化問題とは、ユークリッド空間上で定義される凸関数(目的関数)の閉凸集合上における最小値(最適値)や最小点(最適解)を求める問題である。データ解析や機械学習においては大規模な凸最適化問題を効率的に解く需要が急速に高まり、アルゴリズムの開発が活発化した。特に、大規模な凸最適化問題に対する有用な解法として注目されるアルゴリズムのひとつに「劣勾配アルゴリズム」が挙げられる。このアルゴリズムは長い歴史を持ち一定の理論的な結果も確立されていたが、「問題の構造」を利用することによりさらに効率的な劣勾配アルゴリズムの構築が可能であることが当時の研究により少しずつ明らかとなった。

劣勾配アルゴリズムの基本的な流れは次の通りである。現在の点を与えられたとき、その点において目的関数の劣勾配を計算し、それをを用いて目的関数を最小化が「簡単な関数で近似する。この近似関数の最小点を求め、新しい点へ更新する。これを繰り返すことで、もとの問題の最適解への収束を目指すのが劣勾配アルゴリズムである。「問題の構造」を利用することは、近似関数の構成を工夫することや、新しい点への更新式を工夫することにより高速化をねらうことなどが挙げられる。

問題の構造とは、目的関数などに対する数学的な仮定や数理モデルを指し、いくつかのパラメータを用いて具体的な特徴を表現することが多い。したがって、それらパラメータの値は、問題構造を決定するための重要な情報となる。ところが複雑な最適化問題に対しては問題構造に関わるパラメータを予め知ることが困難である。そこでこのパラメータを推定しながら効率的なアルゴリズムを開発する手法も研究が進み始めた。

アルゴリズムの構築における実用性の基準として以下の項目が挙げられる。

- (1) 対象とする問題のクラスが限定的でないこと。広い応用に適用できること。
- (2) 問題の構造を記述するためのパラメータを事前にどれだけ知っている必要があるか。
- (3) アルゴリズムで理論保証される計算量はどれほどか。
- (4) アルゴリズムの理論保証付きの終了判定法があるか。
- (5) アルゴリズムの収束が保証されるか。

研究開始当初において、問題構造の利用に関する研究は実用性に欠ける部分があった。例えば、ヘルダー型のエラーバウンドという条件を満たす問題のクラスに対しては、多数の応用が存在する一方で、劣勾配アルゴリズムの既存研究では上記の項目のどれかが満足されない状況であった。

2. 研究の目的

本研究では上記の研究背景に基づき、以下の課題を掲げて、それらを解決するための研究に取り組んだ。

- (1) 問題構造に関わる未知パラメータの推定手法の確立。

上記の実用性の基準(1)と(2)について、問題の構造をより抽象的にするほど適用可能な応用は広がる一方で、問題を記述するためのパラメータが増加することがある。例えば、目的関数の勾配がヘルダー条件を満たす場合や、問題がヘルダー型のエラーバウンドを満たす場合には、それぞれその条件を記述するための係数と指数という2種類のパラメータが登場する。これらのパラメータが予め分かっている場合、「最適な計算量」(これ以上理論的に改善できない計算量)を持つ勾配アルゴリズムの存在が知られている。本研究では、これらのパラメータが未知である場合について、それらを推定しながらアルゴリズムを実施しつつ「最適な計算量」になるべく近い性能を発揮させる手法の確立を目指した。

- (2) 計算可能な最適性の指標を用いた終了条件に基づくアルゴリズムの構築。

劣勾配アルゴリズムの研究において、最適性の指標として「目的関数と最適値の誤差」が用いられることが多く、その指標に基づいてアルゴリズムの計算量が解析されていた。この最適性の指標では、実用的な終了条件を別に議論する必要がある。一方、勾配のノルムといった計算可能な最適性の指標のもとでは計算量の理論保証について未解決な部分が多い。本研究では、勾配を拡張した勾配マッピングと呼ばれる計算可能なベクトルのノルムを最適性の指標にしたときの有意義なアルゴリズムの構築を目指した。

- (3) 凸錐の幾何学の研究。

凸最適化問題の性質を考察する上で、凸錐と呼ばれる基本的な凸集合の幾何学的性質を調べることはアルゴリズムの開発するための基礎として重要である。特に、対称錐という凸錐は内点法などのアルゴリズムの議論に重要な理論を与える。一方で、与えられた凸錐が対称錐であるかという判定はそれほど自明ではない。本研究では対称性の検証のための理論的な手法の構築を目指した。

3. 研究の方法

上記の課題(1)に対しては、既存のパラメータ推定手法を調査し、本研究の目的と照らし合わせて、目的とする問題のクラスでのパラメータ推定手法の確立を図った。様々な問題のクラスに対して考察を行い、知見を蓄積していきながら、より一般の場合におけるパラメータ推定手法の開発を行った。

上記の課題(2)について、勾配マッピングのノルムを指標とする停止条件はある問題のクラスに対しては先行研究が存在する。特に、ある一定の条件を満たしたときにアルゴリズムを再出発させる手法は、勾配マッピングの解析に有意義である点に着目した。この手法に基づき、課題(1)との両立を図りながら実用性を備えたアルゴリズムの構築に繋がられるような、新しい手法の開拓を試みた。

上記の課題(3)である、凸錐の幾何学の研究について、基本的な概念である凸錐の面や自己同型写像の構造について研究を行った。特に、 p 次錐と呼ばれる二次錐を拡張した凸錐に対して、これまで等質性や自己双対性といった性質の有無が知られていなかったが、凸錐の構造を知る上で有用な情報であるため、これら性質の解明を試みた。凸錐の幾何学を調べる上で有用な概念を適用し、様々な側面から対象とする凸錐を調べていくことで、目的とする性質の解明に寄与すると期待される情報を回収した。

4. 研究成果

本研究の成果は、問題構造を利用した勾配アルゴリズムの確立と、 p 次錐に関する凸錐の幾何学的性質の解明の2つに大別される。以下にそれらの概要を述べる。

(1) 問題構造を利用した勾配アルゴリズムの確立

本研究の代表的な成果は、上記の課題に掲げた「未知パラメータの推定手法」および「計算可能な最適性の指標を用いた終了条件」を兼ね備えた勾配アルゴリズムを確立したことである。より具体的には、目的関数が平滑でかつ問題がヘルダー型のエラーバウンドを満たすような凸最適化問題を考えると、問題構造を記述するためのパラメータとして平滑性を示すリップシツク係数や、エラーバウンドの係数・指数が挙げられる。この研究成果では、これらのパラメータが未知である場合にも、効率的に適用可能な勾配アルゴリズムを構築した。この勾配アルゴリズムの実用性について、その特徴を以下に述べる。

ヘルダー型のエラーバウンドは、問題が半代数性という性質を満たせば成り立つため、非常に多くの応用問題で成り立つことが知られている。このときエラーバウンドに現れる係数や指数のパラメータが予め分かるのは特別な場合のみである。本成果では、これらのパラメータの存在さえわかれば、具体的な値を知らなくてもアルゴリズムを実施可能であり、効率的な性能を発揮すると期待される。

本成果で提案するアルゴリズムは勾配マッピングと呼ばれる計算可能なベクトルのノルムを最適性の指標として解析している。この指標がゼロになるとき、最適解が得られたことを意味する。提案するアルゴリズムはこの指標がゼロに収束するように設計されている。計算量の解析はこの指標に基づいて行われているため、理論保証を与えつつ、実用性を持つアルゴリズムを提案している。

ヘルダー型のエラーバウンドを満たす問題のクラスに対する勾配アルゴリズムの計算量には、これ以上理論的な改善ができない限界の計算量が知られている。本成果で提案する勾配アルゴリズムは、この「最適な計算量」に対して高々対数倍の計算量を保証することを証明した。このことは提案手法の有用性を示す重要な理論的結果である。

以上の3点に説明されるように、本成果は、高い実用性を持ち有意義な理論保証を与える勾配アルゴリズムの確立に成功した。

(2) p 次錐の自己同型群と関連する性質の解明

二次錐は、凸最適化において基本的かつ重要な凸錐のひとつであり、二次錐に基づく最適化問題やそれに対するアルゴリズムが活発に研究されている。 p 次錐と呼ばれる凸錐は、この二次錐を一般化したものであり、 $p=2$ のときが二次錐に対応する。二次錐は対称錐であることが知られているが、それ以外の p 次錐の対称性については詳しく理解されていなかった。このような p 次錐の性質を解明することは、 p 次錐に基づく凸最適化のアルゴリズム開発にも重要な寄与を与えるものである。本研究の特筆すべき貢献は以下の3点である。

p 次錐の自己同型群の構造を決定することに成功した。これまでは3通りの p に対して自己同型群の構造が知られるのみであったが、すべての p に対しての自己同型群を明らかにすることができた。特に、二次錐以外の p 次錐の自己同型群はすべて同じ集合になるという事実が明らかとなった。

この成果により、二次錐以外の p 次錐が等質性を持たないことや、 p 次錐が任意の内積に対して自己双対でないことを明らかにした。このことは、二次錐以外の p 次錐は対称

錐でないことを詳しく説明するための重要な事実である。

本研究は、 p 次錐の自己同型群の解析に微分位相幾何学的な議論を導入した点が独創的である。解析では、凸錐の境界上の各点において「滑らかさの度合い」をある関数の微分可能性の階数によって定義し、それが微分同相写像に対する不変量になっているという事実を用いた。本研究成果は、凸錐の解析に対する新しい幾何学的道具を与えるものと期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masaru Ito, Bruno F. Lourenco	4. 巻 471
2. 論文標題 The automorphism group and the non-self-duality of p-cones	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 392 ~ 410
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.10.081	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Masaru, Fukuda Mituhiro	4. 巻 188
2. 論文標題 Nearly Optimal First-Order Methods for Convex Optimization under Gradient Norm Measure: an Adaptive Regularization Approach	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Optimization Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 770 ~ 804
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10957-020-01806-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 伊藤勝, Zhaosong Lu and Chuan He
2. 発表標題 Frank-Wolfe 法における適応的なステップ幅の選択
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年春季研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaru Ito, Mituhiro Fukuda
2. 発表標題 Nearly optimal first-order method under Holderian error bound: An adaptive proximal point approach
3. 学会等名 The Sixth International Conference on Continuous Optimization (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaru Ito, Mituhiro Fukuda
2. 発表標題 A nearly optimal first order method for convex optimization with an adaption to Holderian error bound condition
3. 学会等名 International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis--International Conference on Optimization: Techniques and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaru Ito, Mituhiro Fukuda
2. 発表標題 An adaptive first order method for weakly smooth and uniformly convex problems
3. 学会等名 The 23rd International Symposium on Mathematical Programming (ISMP2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤勝, Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 p 次錐の自己同型群と非双対性
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年秋季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤勝, 福田光浩
2. 発表標題 勾配のノルムを停止条件とする準最適な一次法
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2019 年春季研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤勝・福田光浩
2. 発表標題 凸最適化に対する一次法の再出発法と未知パラメータへの適応
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年春季研究発表会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------