

令和 2 年 6 月 19 日現在

機関番号：32204

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14031

研究課題名（和文）代数学習における文字式の理解を促進する教材の開発と検証

研究課題名（英文）Design of a way for increasing students' comprehension of school algebra

研究代表者

榎本 哲士 (Enomoto, Satoshi)

白鷗大学・教育学部・准教授

研究者番号：60758811

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、中学校数学科における代数に関わる内容（特に、文字式・方程式）の教授学習を改善するために、イングランドで実施されたICCAMSプロジェクトに着目し、生徒の文字の理解を促進させる学習指導の方法を開発・検証することを通して、教材の開発原理の一部を明らかにした。具体的には、生徒による文字の解釈の変容を促進させるための学習指導の方法を検討した上で、その方法に基づいて教授実験を実施した。そして、学習指導の方法を検証しながら、教材に備えるべき要件を考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで数学的な記号としての文字に対する生徒の理解について、多くの研究が行われてきた。それらの研究では多くの生徒の実態が報告されているが、その理解を促進させる方法については十分には明らかにされてこなかった。本研究はこの方法を学習指導の方法と教材の特質に焦点を当てて明らかにしようとしたものであり、この点に学術的意義がある。また、学習指導要領や教育振興基本計画では、ICTを活用した学習指導の推進が強く求められており、その推進に資する教授実験を計画・実施したことに本研究の社会的意義がある。

研究成果の概要（英文）：This research project explored a way to change students' conception of letters in school mathematics. To this end, this project conducted teaching experiment with ICCAMS materials based on a way for changing their conceptions of letters.

研究分野：教科教育学（数学教育学）、科学教育

キーワード：数学教育 文字 未知数 変数 ICCAMS

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

文字を用いて表したり、文字を用いて思考したりすることは、数学の特徴の一つである(中村, 1981)。ゆえに、文字を用いた式は、ある事象から規則をみつけたり、みつけた規則性を数学的に表現したり、その規則性が一般的に成り立つのかを調べたりする数学的活動において不可欠であり、学校数学で学習指導する内容の中でも中心的な内容として位置づけられている。

しかし、学校数学において文字を学習することは生徒にとって困難であるとされ、様々な観点から文字の学習における生徒の実態が報告されてきた。これまでに報告された文字記号の学習に関する生徒の困難性には、プロセス・プロダクトジレンマ(Sfard & Linchevski, 1994)というものがある。これは、文字と記号を駆使して発展してきた数学において、文字を用いた式が計算の過程(プロセス)とも結果(プロダクト)とも解釈できることに起因する混乱である(Sfard & Linchevski, 1994)。例えば、等式 $2x + y = 3$ は、「ある数 x を 2 倍しある数 y を加えると 3 になるという計算の過程」や、「 $2x + y$ という値と 3 は等しいという相等関係(計算の結果)」、あるいは「 x を決めたら y がただ一つに決まるという関数関係」として解釈することができる。このような式の解釈の多様性は、それ自体を文脈に応じて活用することで数学的な問題解決や数学的思考を促進させる一方、数学を学習し始めたばかりの生徒を混乱させ、学習を阻害するというのである。

また Sfard ら(1994)は、プロセスとプロダクトという数学的概念の二面性にに基づき、数学の歴史を分析している。その結果として、数学はその歴史上、大きく二つの焦点の変容を有しているということを明らかにした。詳述すると、一つ目の焦点の変容は「計算の過程」から「方程式」への移行であり、二つ目の焦点の変容は「方程式」から「関数」への移行である。第一の変容では、未知数としての文字の使用が導入されることにより、文字式が計算の過程を表すだけでなく、その計算の結果(プロダクト)も同時に表すことになる。また、第二の変容では、等式の表す数量関係が「相等関係」から「関数関係」へと変更され、それに伴い等式の中の文字の解釈も「未知数」から「変数」へと変更される。Sfard らは、数学的な表現である文字と式の解釈の変容を数学の歴史上で捉えるとともに、このような変容が学校数学の中にも存在していることで生徒の理解を妨げる要因になっていると指摘している。

文字に対する生徒の解釈について他の指摘がある。それは、イングランドにおいて実施された CSMS 調査の結果によるものである。Küchemann(1981)は、大規模調査の結果をもとに、生徒による文字の解釈を類型化し、それらに水準を設定した。この指摘においても、Sfard らによる指摘と同様に、文字を未知数とみることよりも変数とみることのほうが難解であることが示された。本研究は、その点に着目して研究を進める。

Sfard らによって示された焦点の変容のうち、第一の変容における生徒の困難性の実態は我が国の博士論文においても取り上げられ、解明が進められてきた。しかしながら、第二の変容、未知数から変数に文字の解釈をかえるような学習場面における生徒の思考の様相は多く報告されておらず、十分に研究が進められているとは言えない。それゆえ、生徒の思考の様相を明らかにし、生徒の理解を促進するような学習指導の方法を開発する必要がある。

2. 研究の目的

上述した背景から、本研究は代数学習において学習者が抱く困難性を解消し、生徒の理解を促進する学習指導の方法を開発するために、以下の 2 点を明らかにする。

- (1) 等式の中の文字の解釈を「未知数」から「変数」へと変換する際の生徒の思考の様相を明らかにする。また、その背後にある文字に関する学習過程を顕在化する。
- (2) 等式の中の文字に対する生徒の解釈を変容させるための教材と学習指導方法を開発し検証する。

3. 研究の方法

本研究は、上記した目的を達成するために、以下の三つの項目に計画的に取り組んだ。

(1) 式の中の文字の解釈を変容する際の生徒の困難性の特定

数学的概念の二面性(プロセスとプロダクト)を視点として、検定教科書を分析することを通して、文字の解釈を変えることを必要とする学習の内容や場面を特定し、その上で、特定した学習場面における生徒の困難性を明らかにした。

(2) 文字の理解を促進するための教材を用いた学習指導の方法の開発と検証

CSMS 調査以降、生徒の困難性を特定し、その困難性を解消する方法を開発する研究プロジェクトがイングランドにおいて多く展開されてきた。本研究はその中の ICCAMS (Increasing Competence and Confidence in Algebra and Multiplicative Structures, 以下 ICCAMS) プロジェクトに注目した。それは、ICCAMs プロジェクトが、事象を探究する過程を通して代数や乗法構造に関する生徒の理解を促進することを意図して設計・実施されたものだからである。ICCAMs で提案されている教材「T-shapes」を日本の生徒の実態に合わせて一部変更して、それを用いて教授実験を計画・実施した。その際に、生徒による文字の解釈の変容を促すために、テクノロジー(Geogebra など)を利用して数学的な対象を動的に生徒へ提示すること、形成的アセスメントを用いたフィードバックの方法について検討した。

4. 研究成果

(1) 二元一次方程式を一次関数を表す式とみる際の生徒の困難性

研究方法(1)に従って、数学的概念の二面性(プロセスとプロダクト)を視点として、中学校数学科の検定教科書で取り扱われている内容を分析した。その結果、領域「数と式」で取り扱われる方程式の学習から領域「関数」で取り扱われる一次関数の学習に至る過程において、生徒は等式の中の文字の解釈を未知数から変数に変える必要があることがわかった。この学習の過程は、Sfardらによって指摘された第二の変容に関わるものであると想定される。

このような第二の変容に関わる内容の学習について、生徒がどのような状況にあるのかを調べるために、本研究では全国学力・学習状況調査の結果を参照した。それは、全国学力・学習状況調査では、これまでに「二元一次方程式を一次関数を表す式とみること」に関する問題が出題されているからである。全国学力・学習状況調査では、これまでに平成21年度調査と平成27年度調査で「二元一次方程式を一次関数を表す式とみること」を評価する問題が出題されている。それぞれの問題の正答率は、36.7%(平成21年度)と38.7%(平成27年度)であった。この正答率から多くの生徒が理解できていない状況にあることが把握できた。

本研究は、上記した全国学力・学習状況調査の追調査を計画・実施し、生徒の記述した内容等を分析することを通して、困難を抱く生徒の思考をより詳細に明らかにしようとした。追調査では、まず全国学力・学習状況調査の問題を使用して、二元一次方程式のグラフを直線ではなく離散的なグラフとして捉えている生徒を特定し、その生徒による記述を分析している。二元一次方程式のグラフとして離散的な点のみのグラフを選択する生徒の中には、方程式の中の文字の変域を整数の範囲のみで捉えている生徒が存在した。二元一次方程式を一次関数の式と見る際に、その等式の中の文字が表す数の集合について考えようとする生徒の思考を把握することができた。この研究成果の一部を研究論文として発表した。

(2) 事象の探究過程における生徒の文字の解釈とそれを変容させる方法

研究方法(2)に従って、ICCAMSプロジェクトによって開発された教材「T-shapes」を使用し教授実験を計画・実施した。教材「T-shapes」とは、文字 n の値に依存して変化する形を探究する教材のことである。

教授実験は、2度実施した。1度目の教授実験は、平成31年1月上旬に東京都内の国立大学附属中学校第3学年の生徒、合計146名を対象に実施した。2度目の教授実験は、平成31年3月中旬に札幌市内の公立高等学校第1学年の生徒、合計40名を対象に実施した。実施した教授実験において収録したデータの中からいくつかの事例が得られた。

その事例に基づいて、文字 n の値を変えながら形を探究する過程における生徒の文字に対する解釈について分析した。分析する際には、Küchemann(1981)がピアジェの発達段階に合わせて作成した「生徒による文字の解釈の水準」を用いた。

その結果、文字 n を「静的に(未知数として)」解釈する生徒の考えと、文字 n を「動的に(一般化された数として)」解釈する生徒の考えが明らかになった。「静的に(未知数として)」解釈する生徒は、形を探究する過程において方程式の解を吟味することを通して「該当する形がない」と判断し、探究することをやめてしまった。Geogebraを使用して文字 n の値に対応する形の変化を動的に提示してもなお、自分の考えを変えることはなかった。一方、「動的に(一般化された数として)」解釈する生徒は、周の長さを表す式 $4n+20$ をもとに、いくつかの代表的な形を考察しながら探究を進めた。このように生徒による文字の解釈が、事象を数学的に探究する過程に影響を及ぼすことが推察された。この研究成果については、関連する学会で研究発表を行った。

上述のような教授実験の結果を踏まえ、本研究では、教材の設計原理として次のことを明らかにした。それは「学習者が事象を想像するための文脈を設定すること」である。また、本研究では、生徒による文字の解釈の変容を促す方法として、Geogebraなどのテクノロジーを用いて文字 n の値に対応する形の変化を動的に提示することを考えていた。しかし、文字の解釈を変容させたい生徒に対し、準備していた方法で形の変化を提示しても、文字 n を静的に捉えた生徒は自分の考えを変えることはなかった。それゆえ、新たに生徒の文字の解釈を変容させる方法について、収録したデータをもとに再検討する必要がある。これが今後の課題である。

本研究では、ICCAMSプロジェクトの中心メンバーであるHodgen教授(ロンドン大学)を日本へ招聘して国際研究セミナーを開催した。セミナーでは、本研究の成果について、特に教授実験の結果を発表し議論した。

<引用文献>

- Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2012). *The ICCAMS Teaching Materials: A pack for teachers*. King's College London & Durham University.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, (pp.102-119). London: John Murray.
- 中村幸四郎(1981). 数学史 形成の立場から. 共立出版.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The Gain and the Pitfalls of Reification: The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 榎本哲士	4. 巻 第13巻第1号
2. 論文標題 数学教育における形成的アセスメントの定義とその特徴	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 白鷗大学教育学部論集	6. 最初と最後の頁 161 - 172
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 榎本哲士	4. 巻 588号
2. 論文標題 イングランドにおける代数的思考を育成するための取り組み：ICCAMSプロジェクトを事例として	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 新しい算数研究	6. 最初と最後の頁 40-41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 榎本哲士	4. 巻 73
2. 論文標題 数学的に考える資質・能力の育成を目指した学習指導に関する一考察：オープンエンドアプローチ研究を手がかりに	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 調査研究シリーズ これからの時代に求められる資質・能力を育成するための数学科学習指導の研究	6. 最初と最後の頁 31-39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 榎本哲士	4. 巻 通巻576号
2. 論文標題 イングランドにおける形成的アセスメントに関する研究動向	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 新しい算数研究	6. 最初と最後の頁 36-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 榎本哲士	4. 巻 11
2. 論文標題 中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する一考察：全国学力・学習状況調査の追調査を てがかりに	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 白鷗大学教育学部論集	6. 最初と最後の頁 1-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 榎本哲士、西村圭一、清水宏幸
2. 発表標題 事象の探究過程における文字の解釈の影響に関する一考察：ICCAMS教材を用いた教授実験をもとに
3. 学会等名 日本数学教育学会 第52回秋期研究大会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 吉田武男（監修）、清水美恵（編著）、榎本哲士（分担：第7章）	4. 発行年 2019年
2. 出版社 ミネルヴァ書房	5. 総ページ数 200
3. 書名 初等算数科教育	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考