

令和 2 年 5 月 27 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14033

研究課題名（和文）証明の構想における議論の蓋然性に着目した問題解決・問題設定の促進

研究課題名（英文）Facilitating students' problem solving and posing by focusing on argumentative processes of planning proofs

研究代表者

辻山 洋介 (Tsujiyama, Yosuke)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：10637440

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、証明の構想における議論の蓋然性に着目して、その議論を証明の構成（問題の解決）に生かす活動、及び新たな問題の設定に生かす活動を促進するための教材及び指導法を考案することを目的とした。この目的を達成するために、理論的考察による教材及び指導法の立案、予備調査の計画・実施・分析による教材及び指導法の再検討、本調査の計画・実施・分析による教材及び指導法の妥当性の検証に取り組んだ。その結果、教材及び指導法について、用いる問題、命題がなぜ真であるかの把握の促進、新たな問題を設定する活動の設計、振り返りの促進に関する4つの手立てを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究上の意義として、議論に着目した従来の研究は、生徒の活動の記述的な分析に重点を置き、指導についての考察は不足してきた。対照的に、本研究は議論の蓋然性に着目した理論的な考察をもとに、生徒の活動を促進する教材及び指導法を明らかにした点に意義がある。

実践上の意義として、令和3年度から実施される新学習指導要領では、小中高の算数・数学科で一貫して「算数・数学の問題発見・解決の過程」が重視されることになり、問題設定にかかわる学習過程がこれまで以上に強調されている。本研究が明らかにした促進の手立ては、この学習過程を実現するための一助となる点に意義がある。

研究成果の概要（英文）：This study aimed at designing teaching materials and methods to facilitate students' proof construction and problem-posing based on their probable argumentations in planning proofs. For this aim, this study devised a plan of teaching materials and methods theoretically, revised them based on preliminary examinations practically, and verified the revised teaching materials and methods based on real examinations. As a result, this study showed teaching materials and methods especially concerning tasks to be used, clarification of why propositions are true, posing new problems based on solving the original problem, and reflection on original and posed problems.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育 証明の構想 証明の構成 問題設定 議論（argumentation） 学習過程 蓋然性 多様性

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

証明学習において、生徒が自立的・協働的に証明問題の解決・設定に取り組む活動の重要性が指摘されているが、多くの生徒は証明問題の解決やその解決に基づく発展的な考察に困難を抱えており、学習指導の具体的な指針を明らかにすることが必要である。そのために、証明の構想に焦点を当て、証明問題の解決と新たな問題の設定に取り組むことができるようにすることが、数学教育の実践上及び研究上の重要な課題となっている。

この課題に対し、本研究は次の二つのアプローチから考察を行う。第一は、証明の構想における議論の蓋然性に着目することである。証明の論理や形式に着目した従来の研究を超え、議論(argumentation)の蓋然性に着目して証明の構想を分析する研究が行われている。簡単に述べれば、議論とは、蓋然的な論を立てたり、論の妥当性や価値を評価し合ったりする営みである。証明の構想は「どのような見通しや計画をもとに証明問題を解決するか」を考える活動である。証明の構想においては、証明の結果には明示的に現れない不確実な着想や飛躍のある推論等を行うが、議論の蓋然性に着目することによってこれらの着想や推論に焦点を当てることに本研究の特徴がある。この着眼点は、証明(proof)という結果ではなく証明活動(proving)という営みとして生徒の取り組みを捉えるアプローチとも、数学者の研究の過程とも整合的である。

第二は、証明の構想に基づく問題解決・問題設定を促進する手立てを考案することである。近年、1980年代を中心とした問題設定の研究が見直され、証明を含む全領域において問題解決・問題設定のあり方が再考されている。この試みは、証明学習の本性としても重要である反面、上述の学習状況を考慮すると、証明の構想を問題解決・問題設定の過程に位置付けるだけでなく、証明の構想に基づく問題解決・問題設定の活動を促進する手立てを考案する必要がある。

### 2. 研究の目的

以上の背景から、本研究は、証明の構想における議論の蓋然性に着目して、その議論を証明の構成(問題の解決)に生かす活動、及び新たな問題の設定に生かす活動を促進するための教材及び指導法を考案することを目的とした。

### 3. 研究の方法

前述の研究目的を達成するために、本研究は以下の手続きで研究を進めた。

- (1) 理論的考察による教材及び指導法の立案
- (2) 予備調査の計画・実施・分析による教材及び指導法の再検討
- (3) 本調査の計画・実施・分析による教材及び指導法の妥当性の検証

本研究の前段として、研究代表者は、科学哲学者トゥールミン(Toulmin, 1958/2003)に依拠して議論の蓋然的な本性を同定した上で、証明の構想の過程を分析してきた。また、本研究課題の前提となった関連研究課題(JSPS 科研費 No. 26780504)における調査データを有していた。

以上をもとに、まず(1)について、証明の構想を中心としたこれまでの考察を問題解決・問題設定の文脈において捉え直すとともに、これまでの学習者側の考察を、活動の促進に関する指導側の考察に発展させた。次に(2)について、関連研究課題の調査データを再分析し、授業者を含む研究協力者の助言を得ながら、教材及び指導法を暫定的に立案した上で、予備調査の計画・実施・分析によって実践的な検討を行った。そして(3)について、予備調査の分析と、関連する研究の知見とを総合し、教材及び指導法を再検討した上で、研究協力者の助言を得ながら、本調査の計画・実施・分析によって妥当性の検証を行った。また、独立基盤形成支援により、ICTの活用を含めた教材及び指導法の検討と、より科学的なエビデンスに基づく分析が可能になった。

なお、研究開始当初は、(2)の予備調査は2名のペアを対象として実施する予定であったが、調査協力校の事情により、当初計画していた中学生2名のペアを対象としてではなく、一斉授業の形で行うことになり、またICTの活用は部分的になった。他方、(3)の本調査では、一斉授業1クラスでの実施を予定していたが、研究が順調に進んだこととその過程での研究成果発表により貴重な助言をいただいたことで、中学校の代数、図形、確率の3領域においてそれぞれ2時間構成の一斉授業の形で、ICTを活用した実践を行うことができた。このように、研究計画を多方面から柔軟に変更することにより、想定以上の研究成果を得ることができた。

### 4. 研究成果

- (1) 証明の構想における議論の蓋然性に着目した問題設定の過程：証明の説明性に着目して

1の背景で述べたように、問題設定の研究が見直され、証明を含む全領域において問題解決・問題設定のあり方が再考されている。具体的には、児童・生徒が問題設定に取り組めるようになることが今後ますます重要であることは、国内だけでなく国際的な研究上も指摘されている。例えば、SpringerのResearch in Mathematics Educationシリーズでは、2015年と2016年に問題設定に関する書籍が相次いで出版され、理論と実践の両面から研究が進展している(例えばSinger, Ellerton & Cai, 2015)。他方、証明に限ると、証明問題を解決した後に新たな問題を設定することを通して、問題を新たな視点から捉え直す過程を考察している論文は、前述書籍の掲載論文計48件中0件である。このように、問題設定研究については広く見直されているにもかかわらず、証明の構想と構成をもとにした問題設定に焦点化した研究は進められていないのである。

そこで、本研究は、問題設定研究の端緒であるBrownとWalter(2005)らに立ち返って問題

設定の過程の特質を再検討するとともに、その過程を近年の証明研究と総合し、証明の構想における議論の蓋然性に着目した問題設定の過程を考案することにした。そして、Brown と Walter が問題設定の主な方略の考察において、その第 水準として挙げた「問題分析 (analyzing the problem)」に着目することで、元の命題と設定した命題群を関連づけながら、証明 (群) をもとに「命題 (群) はなぜ真であるのか」を考察する場面として、問題分析を位置づけることにした。

その上で、この意味での問題分析に関連する証明研究として、証明の「説明性 (explanation)」に着目した。簡単に述べれば、証明が説明性をもつ (説明的である、説明力をもつ) とは、その証明が、命題がなぜ真であるのかを示す、あるいはその洞察を与えることである。証明の説明性に関する数理哲学的な考察の中でも、Weber と Verhoeven (2002) は、単一の命題とその証明における説明性だけではなく、関連する命題群とそれらの証明群 (偽であることの証明を含む) における説明性に焦点を当てている。そして、従来の研究が対象にしていた「類 X の数学的対象はなぜ性質  $Q_x$  をもち、類 Y の数学的対象は性質  $Q_y$  をもつのか」という問い (why-questions) に加えて、「類 X の数学的対象はなぜ性質  $Q_x$  をもち、 $Q'x$  をもたないのか」という問いに対する証明の説明性について考察している。

以上のように、問題設定に関する研究と証明の説明性に関する研究の知見を再検討して総合することにより、本研究は次の学習過程を想定して、実践的考察を進めることにした。(図 1)

- 命題を証明すること
- 証明をもとに、命題がなぜ真であるのかを考えること
- 新たな問題を設定すること
- 設定した命題を証明すること
- 証明群をもとに、命題群がなぜ真であるのかを考えること

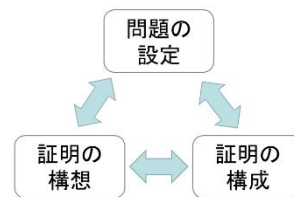


図 1 過程の基本イメージ

## (2) 証明の構想における議論の蓋然性に着目した問題解決・問題設定の促進

(1) で述べたような理論的考察と、中学校での予備調査と本調査 (代数, 図形, 確率の 3 領域においてそれぞれ 2 時間構成の一斉授業) の計画・実施・分析を通して、証明の構想における議論の蓋然性に着目した問題解決・問題設定の促進について以下の手立てを導出し、その妥当性を検証した。

第一は、過程の に関する原問題として、問題解決において既習に基づく証明の構想の立て方が複数あり、かつそれらについて疑念や困難が生じる問題を用いること。

第二に、過程の に関する活動の促進として、複数の証明の構想についての疑念や困難を解消するための着想を、命題がなぜ真であるのかの把握に生かすことができるようにすること。

第三に、過程の に関する活動として、疑念や困難を解消するために新たな問題を設定する活動を組み込むこと。

第四に、過程の と に関する活動の促進として、原問題とその解決を振り返ることができるようにすること。

以下、代数領域での実践 (辻山・佐久間・垣野内, 2019) で用いた題材 (図 2) をもとに具体的に説明する。

123, 234, 345 のように、百の位の数, 十の位の数, 一の位の数 が 1 ずつ増えている 3 桁の数に 198 をたすと, どんな数になるかな?

図 2 原問題

第一に、図 2 の問題で「百の位の数と一の位の数が入れかわる」という予想を得て、その証明を構想することにおいては、文字式を用いることや筆算形式を用いることなど、複数の構想が想定される。さらに、例えば文字式を用いて百の位の数 を  $n$  として計算し、198 をたした数を  $111n + 210$  としたところで「どうしたら予想の証明になるのか」という疑問や、筆算形式を用いて計算する際に、繰り上がりの処理が一般的に説明しにくいという困難が生じることが想定される。

第二に、これらの構想とそれについての疑念や困難を共有した上で、それらを解消するための考え (図 3, 図 4) を比較検討させることで、いずれも「位に分けて数を捉える」着想を使っていることを明らかにし、その着想をもとに、原問題がなぜ真であるのかに対する答えとして、「198 をたすことは、200 をたして 2 をひくことを意味しているから」を把握することができるようにする。

$$\begin{aligned}
 & 100x + 10(x+1) + x + 2 + 198 \\
 &= 111x + 210 \\
 &= 100x + 10x + x + 200 + 10(+0) \\
 &= 100x + 200 + 10x + 10 + x \\
 &= 100(x+2) + 10(x+1) + x
 \end{aligned}$$

図 3 「式変形を上手に使う」考え

百の位	十の位	一の位
$x$	$x+1$	$x+2$
$+2$		$-2$
$x+2$	$x+1$	$x$

図 4 「筆算を用いる」考え

第三に、図3と図4の考えの関係や、200や2という数がどこから出ているのかというさらなる疑念や困難を解消するために、原問題の条件を変えて新たな問題を設定する活動を組み込む。具体的には、「1ずつ増えている」を「2ずつ増えている」や「1ずつ増えている数に限らない」等に変えたり、「3桁」を「4桁」等に変えたり、数の表し方を10進法から12進法等に変えたり、それらの条件に変えたときに「位の数が入れかわるために何をたせばよいのか」を考えたりすることを組み込む。

第四に、設定した問題を解決し、問題分析に取り組む際に、原問題とその解決を振り返らせることにより、例えば原問題においてたす数である200や2が「元の数の一の位の数と百の位の数との差」の2から来ていることを把握することができるようにする。

### (3) 研究の意義と今後の展望

数学教育学研究上の意義として、議論に着目した従来の研究は、生徒の活動の記述的な分析に重点を置き、指導についての考察は不足してきた。対照的に、本研究は議論の蓋然性に着目した理論的な考察をもとに、生徒の活動を促進する教材及び指導法を実践的に考察した点に意義がある。

数学教育実践上の意義として、平成29年に改訂され、令和3年度から実施される新学習指導要領では、小中高の算数科・数学科で一貫して、資質・能力の育成のために重視すべき学習過程として「算数・数学の問題発見・解決の過程」が明示され、問題設定にかかわる活動がこれまで以上に強調されている。本研究が導出した促進の手立ては、今後ますます重視される学習過程を実現するための一助となり、また、多くの生徒が証明問題の解決や設定に困難を抱えている学習状況の改善につながることを期待される。

また、研究の過程で、課題と示唆として次のことが得られた。まず、上述の第四の手立てにかかわって、原問題やその解決と、設定された問題やその解決との比較検討にかかわる活動の特質を、近年の証明の説明性に関する研究をもとに特徴付けることが必要である。次に、第一と第二の手立てにかかわって、証明の構想の蓋然性に加えて多様性に焦点を当てる必要性である。そして、4(1)で述べた学習過程を、数学学習におけるより一般的な学習過程として構築することができそうであるという示唆である。これらの課題と示唆は、本研究の目的においては射程外であったため、今後の研究の課題とする。

なお、これらの課題にかかわって、本研究の申請時には予定していなかった質問紙とインタビュー調査にもとづく量的及び質的な分析を追加で行うことにし、研究期間内の実施を目指して調査問題の作成等の準備を行っていたが、休校により調査を実施することはできなかった。引き続き実施、分析、検証を進める予定である。

### <引用文献>

- Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing (3rd edition)*. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. New York, NY: Springer Science+Business Media New York.
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument (updated edition)*. Cambridge: Cambridge University Press. (Original work published 1958)
- 辻山洋介, 佐久間淳一, 垣野内将貴 (2019). 問題設定における証明の説明性の顕在化: 中学校数学科における実践を通して. *日本数学教育学会 第52回秋期研究大会発表収録* (pp. 423-426),
- Weber, E., & Verhoeven, L. (2002). Explanatory proofs in mathematics. *Logique & Analyse*, 179-180, 299-307.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 辻山洋介	4. 巻 1
2. 論文標題 学校数学における証明活動の方法に関する研究：argumentationを視点として	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 筑波大学大学院人間総合科学研究科 博士論文	6. 最初と最後の頁 1-326
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 辻山洋介	4. 巻 5
2. 論文標題 数学教育におけるargumentationに着目した証明研究の展開：論証カリキュラムの開発研究における論点	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本数学教育学会春期研究大会論文集	6. 最初と最後の頁 133-136
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 小林隆義，辻山洋介	4. 巻 102(1)
2. 論文標題 中学校数学科における多様なモデルの解釈・評価・比較に焦点を当てた確率の学習過程：根元事象と同様に確からしいことの意識化を視点として	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 日本数学教育学会誌『数学教育』	6. 最初と最後の頁 3-14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 辻山洋介・小林隆義
2. 発表標題 確率モデルの解釈・評価・比較における生徒の蓋然的な思考の様相：トゥールミンの「論のレイアウト」による分析を通して
3. 学会等名 日本科学教育学会 第42回年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小林隆義・辻山洋介
2. 発表標題 数学的確率と統計的確率に基づいて同様に確からしい根元事象を考察する活動：中学生が設定したモデルとその変容
3. 学会等名 日本数学教育学会 第50回秋期研究大会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 真野祐輔, David A. Reid, 小松孝太郎, 辻山洋介
2. 発表標題 授業過程の研究手法としてのアーギュメンテーション分析
3. 学会等名 日本科学教育学会 第43回年会(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤幸太, 辻山洋介
2. 発表標題 図形の求答問題をもとにした数学的探究を実現する教材開発：公立中学校での実践を通して
3. 学会等名 日本数学教育学会 第52回秋期研究大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 辻山洋介, 佐久間淳一, 垣野内将貴
2. 発表標題 問題設定における証明の説明性の顕在化：中学校数学科における実践を通して
3. 学会等名 日本数学教育学会 第52回秋期研究大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tsujiyama, Y., Sakuma, J., & Kakinouchi, M.
2. 発表標題 Explanatory function of proving within the context of problem posing
3. 学会等名 International Seminar of Research on Teaching and Learning of Mathematical Proof
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計5件

1. 著者名 辻山洋介	4. 発行年 2019年
2. 出版社 ミネルヴァ書房	5. 総ページ数 200
3. 書名 数学的活動を通じた学習指導．清水美恵（編）『初等算数科教育』（pp. 105-116）	

1. 著者名 辻山洋介	4. 発行年 2018年
2. 出版社 東洋館出版社	5. 総ページ数 72
3. 書名 問題解決の過程で得られる疑問や着想をもとにした問題設定．新算数教育研究会発行『新しい算数研究』，第573号（pp. 36-37）	

1. 著者名 Yosuke Tsujiyama, Yui Koki	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer International Publishing	5. 総ページ数 301
3. 書名 Using examples of unsuccessful arguments to facilitate students' reflection on their processes of proving. In A. J. Stylianides & G. H. Harel (Eds.), <i>Advances in mathematics education research on proof and proving: An international perspective</i> (pp. 269-281)	

1. 著者名 辻山洋介	4. 発行年 2019年
2. 出版社 東洋館出版社	5. 総ページ数 72
3. 書名 児童の問題設定を取り入れた算数教育の実践：教育者自身が問題設定の実践者であること．新算数教育研究会発行『新しい算数研究』，第584号（pp. 38-39）	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----