

令和 2 年 6 月 10 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14154

研究課題名(和文) リー環・量子群の圏論的表現論の研究とモジュラー表現論への応用

研究課題名(英文) Categorical representations of Lie algebras and quantum groups and applications to modular representations

研究代表者

土岡 俊介 (Tsuchioka, Shunsuke)

東京工業大学・情報理工学院・講師

研究者番号：00585010

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：ブルエ・マレ・ルキエは複素鏡映群についてヘッケ環や組紐群といったリー理論の対象を定義し、これらが実鏡映群のものと同様の性質をもつと予想した(1998年)。BMR自由予想はこのうち特に有名なものである。G.Bergmanのダイヤモンド補題(グレブナー基底の非可換版)に触発された手法で、計算機も援用し、真偽が不明のまま残されていた3つの複素鏡映群G17, G18, G19に証明を与え、最終的に解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

BMR自由予想はヘッケ環に関する予想だが、有限簡約群やCherednik代数などの一見異なる群や代数の表現論への応用も知られているため、広く表現論において価値があると考えている。その他にもヘッケ環のBMR自由予想以上に精密な構造論の研究も可能になると思われる。実際、研究成果は、Bouraらによる最近のプレプリントでも言及され、適切な性質を持つ対称トレースの存在という次の段階への研究が提唱されている。

研究成果の概要(英文)：Broue'-Malle-Rouquier defined Lie theoretic objects such as Hecke algebras and braid groups for complex reflection groups and conjectured that they have similar properties to those of real reflection groups in 1998. The BMR freeness conjecture is one of the most famous of these. Inspired by G.Bergman's diamond lemma (an noncommutative version of Groebner basis theory), and with the help of a computer, I gave proofs for three complex reflection groups G17, G18 and G19 that had been left unproved.

研究分野：表現論

キーワード：モジュラー表現論 量子群 対称群 ヘッケ環 圏論化 グレブナー基底 複素鏡映群 柏原クリスタル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

Broué-Malle-Rouquier (Crelle, (1998)) は複素鏡映群についてヘッケ環や組紐群といったリー環論的対象を定義し、これらが通常の Coxeter 群 (実鏡映群) のものと同様の性質をもつだろうと予想した。BMR 自由予想はこのうちもっとも有名なものであり、たとえば日本語 wikipedia でも「BMR」の転送項目 4 件中の 1 つに「BMR 予想」をみることができる (2020 年 6 月現在)。また Eingof や Marin などのサーベイからもわかるとおり、さまざまなアプローチで多くの研究者たちによって取り組まれてきた。2016 年までの段階で 5 つの複素鏡映群について BMR 自由予想を証明すればよいところまで進展し、2017 年 2 月までの段階で、3 つの複素鏡映群 G_{17}, G_{18}, G_{19} について証明すればよいことが知られていた。

以上とは別に、Nandi の予想 (2014 年, Rutgers 大学博士論文) にも取りくんだのでその背景も記す (滝間太基氏との共同研究)。ロジャース・ラマヌジャン恒等式は数学でもっとも有名な恒等式の 1 つだが、Lepowsky-Wilson によって 1970 年代にアフィン・リー環に頂点作用素の理論を導入するきっかけの 1 つとなった。実際、アフィン・ディンキン図形と支配的整ウェイトを与えることに「ロジャース・ラマヌジャン恒等式のような」恒等式がえられると期待されるようになった。たとえば、Andrews-Gordon 恒等式は純粋に組合わせ論・ q 級数の技法で証明されたが、後に頂点作用素理論による証明が与えられ、この期待の一例 ($A^{\{1\}}_1$ で奇数レベル) とみなすことができる。最近ではカナダ・ラッセル予想 (2014 年) のような $D^{\{3\}}_4$ (でレベル 3) といった例外型での研究が盛んだが、元来 $A^{\{2\}}_2$ で詳細に調べられてきた。実際、Capparelli は 1988 年に博士論文においてレベル 3 標準加群の真空部分加群を詳細に調べ、ロジャース・ラマヌジャン分割定理のような予想を提出した。これはすぐに証明されたが、レベル 4 の場合の予想に至るまでには 20 年ほどかかったのである。この予想には「 q の任意個数の繰り返しを含まない」といういわば「無限個の禁止パターン」があり、Andrews による「リンク分割の理論」を拡張する必要があった。

2. 研究の目的

「20 年未解決であった (それなりに有名な) 予想を肯定的に確定する」という明確な目的があるが、その他にも少なくとも 3 つ意義をあげることができる。1 つめは、BMR 自由予想はヘッケ環に関する予想だが、有限簡約群や Cherednik 代数などの一見異なる群や代数の表現論への応用も知られているため、広く表現論において価値があるということである。2 つめは、計算機による手法は、ヘッケ環以外にも生成元と関係式で定義された「小さな代数」に適用できる可能性を秘めているということである (実際、リー環論における例外型の研究では、計算によってでしか確認できない命題が存在しても不思議はない)。3 つめは、ヘッケ環のさらなる理解をうながすであろうということである。たとえば Knizhnik-Zamolodchikov 関手や Riemann-Hilbert 対応を用いて BMR 自由予想の弱い version を示す I. Losev による手法は、BMR 自由予想には幾何学に基づく美しい証明が存在してもおかしくないと思わせる。提唱の経緯から、BMR 自由予想は、やや安直で根拠のとぼしい予想であると考えられることにも一定の合理性があったが、BMR 自由予想が正しいことが確定すれば、安心して本質的な証明の探索へと着手できる。またヘッケ環の BMR 自由予想以上に精密な構造論の研究も可能になるだろう (実際、最近の論文 Boura et al. (J. Algebra, 558 (2020)) でも言及され、BMM symmetrizing trace 予想という次の段階への研究が提唱されている)。個人的には、このような書き換えのモノイダル圏論版があれば面白いと考えており、その予備考察と位置づけることもできる。

Nandi の予想に関連したものを述べる。研究の主目的はその証明だったが、「 $A^{\{2\}}_2$ 型の Andrews-Gordon 恒等式」とでも呼ぶべきものが発見・証明できれば理想的である。本研究はその初期のステップととらえることができる。またカナダ・ラッセル予想に挑戦するための準備ととらえることもできる。実際、数学ではパラメータのついた場合のほうが、例外的な場合より研究しやすいことが多い。本研究で、 $A^{\{2\}}_2$ のいくつかのレベルについて様子をつかむことで、他のアフィン型にもその知見を生かすことができると考えた。さらに計算機を q 級数の計算に有効活用するか試すためのよい試金石になるとも考えた。実際、通常この手の分割定理には同値な恒等式版があることが多く、それは計算機を見つけることができれば、同じ手順をレベルを上げて適用することで先に挙げた「 $A^{\{2\}}_2$ 型 Andrews-Gordon 恒等式」のレベルを特殊化した実例がえられると期待されるし、カナダ・ラッセル予想のような例外型に関する予想を他の例外型ディンキン図形で発見することも期待される。そして研究の必要上生じた計算のためのコードを書きため整理しておくことで、今後同種の分割定理を証明する場合にはいくつもの過程が自動化できることも期待できる。

3. 研究の方法

G. Bergman (Adv. Math., (1978)) の diamond 補題 (Grobner 基底の非可換版) に触発された手法で, 計算機も援用する. ヘッケ環にはパラメータがあって, 特殊化すると群環になる. これは一般論によって群と「同じ」表示を持つ. 群については, 書き換え系が構成できるので, 特殊化するとその書き換え系になるようなパラメータがある場合の書き換え系を得られるように工夫をする. これ自体は安易な方法で容易だが, このようにえられた書き換え系は terminating (あるいは noetherian) と呼ばれる停止性が明らかではない. 一般に書き換え系がその性質を満たすことを示すのは難しい (もっとも一般にはそのようなアルゴリズムがないことが知られている) が, ヘッケ環の場合は Marin によって確立している特殊事情を用いることで回避できる. 実際には, 得られた書き換え系で任意の単項式が有限回で書き換えられることを示せばよい. これを実際にさまざまな工夫を通じて成し遂げる必要がある. 一連の研究は, 複素鏡映群に付随したヘッケ環ではなく, 生成元と関係式で定義された「小さな代数」の具体的計算に使用できるように整理しながら進める.

Nandi の予想については, Andrews の「リンク分割の理論」を「禁止パターンが有限オートマトンで与えられるような」分割のクラスにまで拡張することが基本方針である. 有限オートマトンは計算機科学では基本的だが, 数学であまり使われないのでその調査から始める必要がある. そして無限和 = 無限積の形の同値な恒等式版を見つけるために東工大の TSUBAME3.0 を利用できるよう準備を始める必要がある. またレベル 5 と 7 では Hirschhorn によって分割定理が証明されていたが, これは Nandi によるレベル 4 の予想とはかなり違ったもので, その事情を理解するためにも頂点作用素構成について見直す必要がある. Nandi の予想はそれ単独にある予想というよりは, 理想的には「任意のアフィン型と支配的整ウェイトを与えるごとに」解けるべきと考えられていることもあり, 様々な試みはアフィン型やレベルを変えることで他の予想に応用できる形にすることを念頭に行った. たとえばカナダ・ラッセル予想はもっとも有名な mod 9 以外にも mod 12 のものがあるが, これは $A^{\{2\}}_{\{9\}}$ でレベル 2 の場合であり, $A^{\{2\}}_{\{\text{奇数}\}}$ でレベル 2 や, (たとえば $D^{\{1\}}_{\{n\}}$ といった) 他の無限系列でレベル 2 の場合にも成果を期待するのは一定の合理性がある. また最近, Corteel らによって円柱分割と「 $A^{\{1\}}_{\{2\}}$ 型ロジャース・ラマヌジャン恒等式」との関係が知られるようになってきたが, これらとの関係を調べる必要もある.

4. 研究成果

BMR 予想については, G17, G18, G19 を含むすべてのランク 2 の複素鏡映群について証明を与え, ごく普通の計算機でも詳細を確認できる形にして論文を公表した. この研究でえられた書き換え系を BMM 対称トレース予想といったさらなる構造論へ応用することは今後の課題である.

Nandi の予想については, 禁止パターンが正則言語で記述できるクラスを定義し, それについては母関数の q 差分方程式が自動的に (つまりアルゴリズムで) 求められることを証明した. これは Andrews のリンク分割の理論の一般化になっており, これによって Nandi が予想した分割について q 差分方程式を立てることができた. 後はよくある方法によって解いていくと, 約 70 年前に Slater が証明していた q 級数の恒等式に帰着され, Nandi の予想を証明することができた. また計算機を用いた探索によってレベル 5 と 7 の場合の Andrews-Gordon 型恒等式を発見でき, 伝統的な方法と Slater の恒等式リストを用いて証明を与えることができた. その他, 計算機を用いた探索でいろいろ成果をえたが, これの整理と発表は当面の課題である.

以上とは別に 2 つ記す. 1 点目は B2 型正則クリスタルについて Stembridge が simply-laced 型で与えたような局所的特徴付けを与えることができた. これは数年前に行ったシューア分割定理の局所的証明を期待して行ったものであるが, Kirillov-Reshetikhin クリスタルの研究などにも応用されるのではないかと期待している. 論文中で BMR 予想の解決で用いた「confluence 性」の意義を強調することで, G_2 や $A^{\{1\}}_{\{1\}}$, $A^{\{2\}}_{\{2\}}$ といった他のランク 2 の正則クリスタルの局所的特徴付け (そのようなものがないことを証明しようとする試みも含む) に対する研究にも知見を与えたと考えている. 2 点目は, Deodhar 持ち上げを用いることで, Jacopson によって証明された一般化された Dipper-James-Murphy 予想の別証明に関連して多くの結果が得られた (滝間太基氏との共同研究). 研究期間中に大学を異動したり, 上記の通り複数の課題に取り組んだため十分に注力できたわけではないが, 近いうちにまとめて発表する予定である.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shunsuke Tsuchioka and Masaki Watanabe	4. 巻 146
2. 論文標題 Pattern avoidance seen in multiplicities of maximal weights of affine Lie algebra representations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 15-28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/proc/13597	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shunsuke Tsuchioka	4. 巻 29
2. 論文標題 BMR Freeness for Icosahedral Family	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 234-245
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10586458.2018.1455072	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 A definition of Schur regular partitions
3. 学会等名 Representations of groups and Hecke algebras -- A conference in memory of Anton Evseev -- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 土岡俊介
2. 発表標題 G17, G18, G19型複素鏡映群に関するBMR予想
3. 学会等名 複素領域における函数方程式とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土岡俊介
2. 発表標題 A local characterization of B2 regular crystals
3. 学会等名 表現論と代数、幾何、解析をめぐる諸問題
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 土岡俊介
2. 発表標題 G17,G18,G19型複素鏡映群に関するBMR予想
3. 学会等名 数理・計算科学系談話会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 A local characterization of B2 regular crystals
3. 学会等名 Infinite Analysis 17: Algebraic and Combinatorial Aspects in Integrable Systems (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 New Parametrization of Irreducible Modular Spin Representations of The Symmetric Group
3. 学会等名 2017 Taipei Workshop on Representation Theory of Lie Superalgebras and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 BMR freeness for icosahedral family
3. 学会等名 RIMS研究集会 表現論と組合せ論
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 柏原クリスタル理論を用いたRogers-Ramanujan型分割定理へのアプローチ
3. 学会等名 第62回代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 A definition of Schur regular partitions
3. 学会等名 Quiver Hecke algebra and its applications to topology (Camp Style Seminar) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 土岡俊介
2. 発表標題 G17, G18, G19型複素鏡映群に関するBMR予想
3. 学会等名 CREST暗号数理平成31年度第1回全体会議
4. 発表年 2019年～2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----