2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１２６０１

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：１７Ｋ１４１５５

研究課題名（和文）球等質空間への可視的作用と非可換調和解析への応用

研究課題名（英文）Visible actions on spherical homogeneous spaces and applications to non-commutative harmonic analysis

研究代表者

田中　雄一郎（Tanaka, Yuichiro）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教

研究者番号：７０７８００６３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では以下の2つを目的として掲げた。
1.複素球多様体への実形の作用の可視性を示す。2.実形による複素球多様体への可視的作用を、非可換調和解析に応用する。特に球関数を構成しその性質を調べる。
まず1年目の研究により、「コンパクトリー群のハミルトニアンな作用に対しコイソトロピック性と強可視性とが同値である」という結果を得た。次の2年目では「実簡約リー群の簡約型球部分群に対するカルタン分解」を得た。最後の3年目において「球関数の対称性」及び「Helgason Fourier変換」をGelfand対に対して拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
1年目の研究成果は、笹木集夢氏による先行研究における線型作用の場合の結果（2009～2011年）の拡張になっている。
次の2年目の研究成果は小林俊行氏による実球等質空間に対する予想（1995年）のうちの1つに対する肯定的解決を与えており、またM. Flensted-Jensen氏（1978年）とW. Rossmann氏（1979年）による実簡約型対称対の場合の拡張になっている。
最後の3年目の研究成果は、リーマン対称対に対し知られていた非可換調和解析の結果の簡約型Gelfand対に対する拡張になっている。

研究成果の概要（英文）：In the first year I studied visible actions of compact Lie groups from the viewpoint of symplectic geometry. The theory of visible actions on complex manifolds has been introduced by T. Kobayashi with the aim of uniform treatment of multiplicity-free representations of Lie groups. I proved the equivalence of visibility and coisotropicity for actions of compact Lie groups under the Hamiltonian setting.
In the second year I studied the Cartan decomposition. From the viewpoints of harmonic analysis on homogeneous spaces and branching problems for representations of real reductive groups, Kobayashi introduced a conjecture on the Cartan decomposition for real spherical subgroups in the 3rd Summer School on Number Theory 1995. I proved that Kobayashi's conjecture is true in general.
In the third year I extended the symmetry of spherical functions and Helgason Fourier transform to reductive Riemannian Gelfand pairs.

研究分野：リー群の表現論

キーワード：リー群　可視的作用　非可換調和解析　無重複表現　球等質空間

１．研究開始当初の背景

群の線型空間への線型作用を群の表現と呼ぶ。特に、既約分解に現れる各既約成分に重複がないときは、無重複表現と呼ばれる。この無重複という性質は非常に良いため、古くから様々な形で現れ、研究されてきた。無重複表現はその多様性に相俟って、研究手法もまた個性的であるが、小林俊行氏は複素多様体に対する可視的な作用の理論([Kobayashi, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005)])を導入し、無重複表現の統一的研究を開始した。小林氏の無重複性の伝播定理によれば、リー群が複素多様体に可視的に作用するとき、正則関数の空間は無重複となる。すると自然にその逆、即ち、「正則関数の空間が無重複ならば、群作用は可視的か？」という問いが浮かぶ。複素簡約代数群のコンパクト実形の作用に関しては、以下の各場合に問い「無重複ならば可視的か？」に対する肯定的結果が知られていた。

(1) X が複素対称空間であるとき（[Kobayashi, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005)]）
(2) X が A 型複素冪零軌道であるとき（[Kobayashi, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005)]）
(3) X が A 型一般旗多様体であるとき（[Kobayashi, J. Math. Soc. Japan 59 (2007)]）
(4) X が無重複線型空間であるとき（[A. Sasaki, Int. Math. Res. Not. (2009), (2011)]）
(5) X がある具体的な複素球等質空間であるとき（[Sasaki, Geom. Dedicata 145 (2010), J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17 (2010), Adv. Pure Appl. Math. 2 (2011)]）

上記の先行結果を踏まえ、本研究代表者は X が一般の複素球多様体のときに問いに対する肯定的結果を得た（2015 年）。

２．研究の目的

これまでの研究で複素球多様体に対するコンパクト実形の作用の可視性に決着が付いたため、さらなる発展をさせるべく、本研究では以下の 2 つを主な目的として掲げた。

(1) 複素球多様体への実形の作用の可視性についてさらに調べる。
(2) 実形による複素球多様体への可視的作用を、非可換調和解析に応用する。特に、球関数を構成し、その性質を調べる。

３．研究の方法

まず先行研究における手法を紹介する。

(1) 小林俊行氏が論文[Kobayashi, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005)]において導入した、可視的作用の誘導法。
(2) 小林氏が論文[Kobayashi, J. Math. Soc. Japan 59 (2007)]において導入した、編み上げの手法。

【手法(1)及び(2)の説明】

(1)はユニタリ群 U(n)の複素冪零軌道への作用の可視性を、レビ部分群の複素線型空間へのそれへと帰着させるために用いられた手法である。

他方、(2)はユニタリ群 U(n)のレビ部分群についての両側剰余類の問題を、対称部分群についてのそれに帰着させるために使われた手法である。さらに、対称部分群については松木敏彦氏の結果[T. Matsuki, J. Algebra 197 (1997)]を始めとした豊富な研究があるため、これらを組み合わせて問題に取り組む。

【手法(1)(2)の障害】

手法(1)(2)を一般の設定で適用する際に問題となるのが「先行研究において適用された際には、分類を用いた各論による証明がなされていた」という点である。一般の設定下での分類は未知であるため、以下の(3)(4)のように手法を拡張した。

【本研究における手法】

(3) Weisfeiler 氏の結果[B. Weisfeiler, Uspehi Mat. Nauk 21 1966 no. 2 (128)]を用いて、一般の等質空間に対する作用の可視性の問題を、レビ部分群による滑らかなアファイン代数多様体に対するそれへと帰着させる。これは(1)の拡張になっている。

(4) 群の次元に関する帰納法を用いることで、両側剰余類の問題を対称部分群に関するそれへと帰着させる。これは(2)の拡張になっている。

また、コンパクトリー群の作用の強可視性とコイソトロピック性とを比較する際には、Huckleberry 氏と Wurzbacher 氏による、作用の球性とコイソトロピック性との比較定理（Math. Ann. 286 (1990)）を用いた。

さらに、簡約型Gelfand対に対して球関数の対称性及びHelgason-Fourier変換を得る際には、次元に関する帰納法とリーマン対称空間に対する既知の結果とを組み合わせるという手法をとった。

４．研究成果

(1) 1年目はコンパクトリー群のハミルトニアンな作用について、その可視性の研究を行い、コイソトロピック性と強可視性とが同値であるという結果を得た。これら 2 つの性質については、複素多様体に対する可視的な作用の理論を導入した小林俊行氏自身によって最初にその関係が考察されており(Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005))、強可視性からコイソトロピック性が導かれることが証明されている。さらに、笹木集夢氏によって証明された、無重複線型空間へのコンパクト実形の作用は強可視的であるという結果から(Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, no. 18, 2011, no. 4)、線型な作用については両性質が同値であることが分かっている。1年目に得た結果は、これら先行結果の拡張になっている。本科学研究費を利用して 2017 年 12 月に Tunisia で行われた研究集会に参加し、上記成果について発表した際、とりわけ Wurzbacher 氏から好評を得た。Wurzbacher 氏は Huckleberry 氏との共著論文(Math. Ann. 286 (1990))において無重複性（簡約群の作用する空間が球多様体であること）とコイソトロピック性とが同値であることを証明しており、この結果は本研究課題と非常に深く関連している。また、本科学研究費を利用して参加した、2018 年 1 月に鳥取で開かれた研究集会においても上記研究成果について発表を行った。

(2) 2 年目の研究によって、実簡約リー群の簡約型球部分群に対するカルタン分解を得ることができた。このカルタン分解は対称行列の直交行列による対角化の拡張になっており、É.Cartan によるリーマン対称空間に対するカルタン分解に始まる（1920 年代）。その後、簡約型リー群の２つの対称部分群の組に対する両側剰余類という形（ただし、ここでは、少なくとも一方の対称部分群はコンパクトであるものとする）に M. Flensted-Jensen 氏（J. Funct. Anal. 30 (1978)）、W. Rossmann 氏（Canad. J. Math. 31 (1979)）、B. Hoogenboom 氏（CWI Tract, 5. Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1984)）、E. Heintze, R. Palais, C. Terng, G. Thorbergsson（Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, 1995)の四氏、松木敏彦氏(数理解析研究所講究録 895 (1995)、J. Algebra 197 (1997)）によって一般化されたが、この対称部分群は 2 年目の研究で扱った簡約型球部分群の特別な場合である。簡約型球部分群に対してカルタン分解が拡張できることは、小林俊行氏によって 1995 年の整数論サマースクールにおいて予想という形で提示されていた。本科学研究費を利用して 2019 年 3 月に九州大学伊都キャンパスで開催された 2018 年度表現論ワークショップに参加し、カルタン分解について研究発表を行った。同ワークショップには、カルタン分解について研究している笹木集夢氏も参加していたため、本研究の手法について議論を行った。

(3) 3 年目の研究では、可視的作用のスライスの構成法を援用することで「簡約型 Gelfand 対に対するカルタン分解」を得た。さらに、この非可換調和解析への応用として、リーマン対称対に対して知られていた「球関数の対称性」及び「Helgason Fourier 変換」を簡約型 Gelfand 対へと拡張した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Yuichiro Tanaka	４．巻 -
２．論文標題 A Cartan decomposition for a reductive real spherical homogeneous space	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yuichiro Tanaka	４．巻 -
２．論文標題 Visible actions of compact Lie groups on complex spherical varieties	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Journal of Differential Geometry	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 田中雄一郎	４．巻 2139
２．論文標題 複素球多様体へのコンパクトリー群による可視的作用について	５．発行年 2019年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 37-49
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　5件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 田中雄一郎
２．発表標題 簡約型実球部分群に対するカルタン分解
３．学会等名 2018年度表現論ワークショップ
４．発表年 2019年

１．発表者名
Yuichiro Tanaka

２．発表標題
Visible actions of compact Lie groups on complex spherical varieties

３．学会等名
5th Tunisian-Japanese Conference（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2017年

１．発表者名
田中雄一郎

２．発表標題
Visible actions of compact Lie groups on Hamiltonian manifolds

３．学会等名
2017年度表現論ワークショップ（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
田中雄一郎

２．発表標題
球等質空間に対する松木分解と球関数の構成

３．学会等名
龍谷表現論セミナー（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Yuichiro Tanaka

２．発表標題
A Cartan decomposition for a reductive real spherical homogeneous space

３．学会等名
6th Tunisian-Japanese Conference（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名 田中雄一郎
２．発表標題 複素球多様体への可視的作用とその応用
３．学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 田中雄一郎
２．発表標題 複素球多様体へのコンパクトリー群による可視的作用について
３．学会等名 表現論とその周辺分野の進展
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考