

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14156

研究課題名（和文）K3曲面の自己同型と周期の研究とその応用

研究課題名（英文）Automorphisms and periods of K3 surfaces

研究代表者

橋本 健治（Hashimoto, Kenji）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究員

研究者番号：00793986

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,300,000円

研究成果の概要（和文）：K3曲面は数学の様々な局面で自然に現れる重要な数学的対象である。ただし本研究では複素数で考えているので、通常の意味では4次元空間になる。本研究において注目したひとつの観点は、対称性である。つまり、三角形のなかで正三角形が特殊であるような意味において特殊なK3曲面について非常に詳細な研究を行った。特に、対称性の高い場合や、ある条件の下（ピカル数が低いなど）での対称性の決定について研究した。また、K3曲面の研究においては周期という値が重要であるが、これと保型形式の関連についても考察して具体的な成果を得た。これは保型形式の幾何的な手法による研究とも考えられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

K3曲面は数学において重要な基本的な研究対象と考えられる。従って、様々な場面でK3曲面の知識（情報）が必要あるいは有用となる。例えば、数学においてのみならず数理物理学でも重要であるカラビ・ヤウ3次元多様体の研究において、その2次元版と考えられるK3曲面がしばしば表れることがある。実際に、本研究においてもK3曲面の結果をこのような文脈において応用して成果を得ることができた。このような意味において、本研究の成果が今後応用されることが期待される。

研究成果の概要（英文）：K3 surfaces are important objects in various branches of mathematics. In this research we work over the complex numbers and they are 4-dimensional spaces in the ordinary meaning. One of our main interests is symmetry. In other words, we did the very detailed research on a "special" kind of K3 surfaces, in the same sense that equilateral triangles are special. In particular, we study K3 surfaces with higher symmetry; or determine the symmetry under some conditions (lower Picard numbers, and so on). In addition, we studied "periods" of K3 surfaces, which are important in the study of K3 surfaces. We observed the relation between these periods and so-called automorphic forms, and obtained concrete results. This is considered as a geometric approach to study automorphic forms.

研究分野：代数幾何学

キーワード：K3曲面 格子理論 自己同型 有限群 無限群 保型形式 ミラー対称性 代数幾何

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

K3 曲面の自己同型や周期の問題は、大域的トレリ型定理と周期写像の全射性という2つの大定理によって原理上、格子の問題に帰着される。この観点からの K3 曲面の研究は多数あり、例えば K3 曲面への有限群による作用について既に詳細な研究結果が得られている。それと比較すると無限群作用の研究はまだ十分にはなされていなかった。また、以下の点についても更なる研究の余地があるように思われた：K3 曲面の周期と、対応する直交保型形式の関係について、特に orbifold の観点から研究すること；K3 曲面の研究結果の応用（特にカラビ・ヤウ 3 次元多様体への応用）。

2. 研究の目的

本研究の目的は K3 曲面（主に複素数体上で定義された）の自己同型および周期について研究することと、その応用を探求することであった。自己同型については、有限群作用に関する既知の研究をより発展させることや、まだ十分に研究が進んでいない無限群作用についての研究を進めることを目的とした。また、周期については、具体的な K3 曲面の族の周期写像を考察し、対応する保型形式（環）の構造を決定するという問題に取り組むことにした。そしてこれらの応用を探求することも計画の一部であった。特に、K3 曲面の 3 次元版と考えられるカラビ・ヤウ 3 次元多様体への応用を期待するのは自然なことであった。

3. 研究の方法

(1) 格子理論を応用することで、K3 曲面の自己同型について調べる。特に、判別形式の理論を応用することが重要である。

(2) K3 曲面の適当な族は、周期写像を経由して保型形式環（が定めるモジュライ多様体）に対応する。換言すると、保型形式はモジュライ多様体の正則形式（正確には標準環の元）とみなされる。また、族の退化はモジュライ多様体の orbifold structure として反映される。この対応を用いて K3 族に付随する保型形式環を調べる。特に、余次元 1 の orbifold structure は指標付き保型形式に対応する。

4. 研究成果

(1) ピカール数が 2 の K3 曲面の自己同型群について、十分な記述を得た。一般に、K3 曲面の自己同型群を決定するためには、ピカール格子の直交群の部分群であって、判別群に自明に作用するものの構造を決定する必要がある。ピカール数が 2 の場合に、古典的な 2 元 2 次形式の結果を応用することで、この部分群を決定した。また、よく知られているように 2 元 2 次形式は 2 次体と密接な関係がある。2 次体の類数についての既知の結果を応用することで、ある種の作用（anti-symplectic かつ位数無限の場合）の簡明な存在条件を求めることができた。これにより、ピカール数が 2 の場合の自己同型の Salem trace の分布が非常に具体的に決定された。

(2) 同様の研究をピカール数 3 の場合に行った。この場合は、四元代数（quaternion algebra）を応用することで、具体的な記述が可能となる。実は、(1) で述べた直交群の部分群はこの場合には四元代数とも関連することがわかる。ここから、ピカール数 3 の K3 曲面の自己同型群として、任意に大きい階数をもつ自由群が表れることが結論される。系として、K3 曲面の自己同型群の生成元の個数は有界ではないことがわかる。（有限生成であることは知られている。）

(3) K3 曲面の有限群によるシンプレクティックな作用について、有限単純群であるマシュー群 M_{23} との関連はよく知られている。ここでシンプレクティック作用とは、K3 曲面の大域正則 2-形式を固定するという意味である。この結果を拡張する形で、極大な有限シンプレクティック作用（抽象群としては 11 個あることが知られている）を有限群の範囲で拡大する場合の格子理論的なデータを決定した。このデータを用いることで、いくつかの新しい群作用の射影モデル（具体的な定義方程式により K3 曲面を射影空間の完全交叉として実現する）を構成した。特に、K3 曲面に作用する有限群の中で最大位数をもつものは位数が 3840 であることが知られているが、この場合の射影モデルを見つけた。群作用は射影変換とクレモナ変換により生成されている。

(4) 一般に、（射影的）格子偏極をもつ K3 曲面の族の周期領域は IV 型対称領域になる。K3 族のパラメーターは、周期写像を通してこの IV 型対称領域上の保型形式（直交保型形式）とみなされる。ひとつの典型例としては、モジュライ数（次元）が 2 のときにヒルベルト保型形式（2 変数）が表れることがある。このような例として、トーリック多様体の超曲面として構成したある特殊な K3 族とヒルベルト保型形式の関係について詳細に調べた。また、別のモジュライ数 2 の場合として、モジュライ空間がモジュラー曲線の直積とみなされる場合にも詳細に研究した。また、符号 $(1, 9)$ の遇ユニモジュラー格子 L は同型を除き一意に存在することが知られているが、このような特別な格子 L を格子偏極にもつ族について詳しく調べた。この場合、K3 族

はある重み付き射影空間の超曲面として実現される。その定義方程式の係数は直行保型形式であり、同時にモジュライ多様体の標準環の元と解釈される。この対応により格子 L の直交保型形式環の構造を決定した。特に、この場合は保型形式環は多項式環になる。また、 $K3$ 族の退化の情報はモジュライ多様体の因子を定めるが、さらにモジュライ多様体はこの因子に沿って位数 2 の orbifold structure をもつことがわかる。これは、直行保型形式としては (位数 2 の) 指標付きの保型形式に対応する。

(5) カラビ・ヤウ 3 次元多様体が退化して 2 つの成分に分解するという状況を考えたとき、この 2 つの成分の共通部分が $K3$ 曲面になる場合がある。このとき、2 つの成分の貼り合わせは共通部分の $K3$ 曲面の自己同型により統制される。この自己同型について詳細な考察を行うことにより、「非射影的」カラビ・ヤウ 3 次元多様体の構成について研究を行った。(本来の定義としてはカラビ・ヤウ 3 次元多様体は射影的である。)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kenji Hashimoto and Taro Sano	4. 巻 27
2. 論文標題 Examples of non-Kaehler Calabi-Yau 3-folds with arbitrarily large b_2	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 131 - 152
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/gt.2023.27.131	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Brandhorst Simon, Hashimoto Kenji	4. 巻 4
2. 論文標題 Extensions of maximal symplectic actions on K3 surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales Henri Lebesgue	6. 最初と最後の頁 785 ~ 809
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/ahl.88	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 K. Hashimoto and K. Ueda	4. 巻 147 no. 5
2. 論文標題 Reconstruction of general elliptic K3 surfaces from their Gromov-Hausdorff limits	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1963-1969
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14428	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 K. Hashimoto, JongHae Keum and Kwangwoo Lee	4. 巻 224 no. 1
2. 論文標題 K3 surfaces with Picard number 2, Salem polynomials and Pell equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Pure Appl. Algebra	6. 最初と最後の頁 432-443
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2019.05.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hashimoto Kenji, Ueda Kazushi	4. 巻 147
2. 論文標題 Reconstruction of general elliptic K3 surfaces from their Gromov-Hausdorff limits	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1963 ~ 1969
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14428	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 橋本健治
2. 発表標題 ピカルル数3のK3曲面の自己同型について
3. 学会等名 特殊多様体・特殊関数研究会 (北海道大学) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kenji Hashimoto
2. 発表標題 Finite symplectic actions on the K3 lattice
3. 学会等名 K3 surfaces and lattice theory seminar, 北海道教育大学札幌駅前サテライト (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenji Hashimoto
2. 発表標題 Mirror symmetry for complete intersection K3 surfaces in weighted projective spaces
3. 学会等名 Working Workshop on Calabi--Yau Varieties and Related Topics, 学習院大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenji Hashimoto
2. 発表標題 Period map of a certain family of K3 surfaces with an S_5 action
3. 学会等名 Japanese-European symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces -third edition-, 東京理科大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋本健治
2. 発表標題 Global sections of some special elliptic surfaces
3. 学会等名 UC Riverside Algebraic Geometry Seminar (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋本健治
2. 発表標題 Global sections of some special elliptic surfaces
3. 学会等名 Workshop on algebraic surfaces, University of Hanover (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------