

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14162

研究課題名（和文）トーリック多様体の双対欠損の組合せ論的記述に関する研究

研究課題名（英文）Research on combinatorial descriptions of dual defects of toric varieties

研究代表者

伊藤 敦 (Ito, Atsushi)

岡山大学・環境生命自然科学学域・准教授

研究者番号：90712240

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：対応する多面体を用いたトーリック多様体の双対欠損の記述は得られなかった。一方その研究の過程で以下の結果が得られた。コンピュータビジョンにおける再構成定理の代数幾何的な別証明を与えた。交点数などを用いてアーベル多様体の豊富な直線束のシジジーに関する性質(N_p)をみたすための条件を与えた。代数多様体上の直線束の正值性を測る不変量であるセシャドリ定数の一般化を定義し、その性質を調べた。ファノ多様体のK安定性に関するある予想の反例を構成した。いくつかの3次元カラビ-ヤウ多様体の双有理幾何を研究し、それらに対してはmovable cone予想が成り立つことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

トーリック多様体の双対欠損の記述は得られなかったものの、代数幾何学において非常に重要な対象である直線束やファノ多様体に関し興味深い新たな知見をいくつも得ることができた。とくにアーベル多様体上の直線束の研究には大きな進展があった。またコンピュータビジョンにおける重要な定理に対し代数幾何学的な視点を提供したことも意味がある。

研究成果の概要（英文）：I could not obtain descriptions of dual defects of toric varieties using corresponding polytopes. On the other hand, I obtained the following results during the studies. I gave a new algebraic geometric proof of the reconstruction theorem in computer vision. I gave some conditions for satisfying the property (N_p) concerning the syzygies of ample line bundles on abelian varieties, using intersection numbers and other invariants. I defined a generalization of Seshadri constant, an invariant that measures the positivity of line bundles on algebraic varieties, and studied its properties. I constructed a counterexample to a certain conjecture on the K-stability of Fano varieties. I studied birational geometry of some Calabi-Yau 3folds and showed that the movable cone conjecture is satisfied for the 3folds.

研究分野：代数幾何学

キーワード：トーリック多様体 双対欠損 アーベル多様体 セシャドリ定数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

X を射影空間 P^N に埋め込まれた射影代数多様体とする。 X に接する超平面たちをみることで、 X の双対多様体という別の代数多様体が定義できる。 X の双対多様体の期待次元と実際の次元のずれを X の双対欠損と呼ぶ。射影双対や双対欠損は射影幾何における古典的かつ基本的な概念であり、報告者は本研究以前よりそれらの研究を行ってきた。

2. 研究の目的

報告者は本研究以前の研究で、 X が複素数体上定義されたトーリック多様体の場合に対応する多面体の構造を用いた双対欠損を与えた。しかし正標数の代数閉体上定義されている場合にはその記述は成り立たない。そこで正標数の場合の類似の記述を得ることを目的とした。

3. 研究の方法

双対多様体や双対欠損に非常に親しい概念として、ガウス写像やガウス欠損というものがある。トーリック多様体の場合、ガウス欠損の組合せ論的記述は任意標数でよくわかっている。その記述では、ジョイン型という特殊なケーリー構造が非常に重要な役割を果たしている。そこで双対欠損とガウス欠損を比較しつつ、ジョイン型のケーリー構造を詳しく調べる。

また必要に応じて共同研究者の古川勝久氏とメールや Skype、もしくは直接会ってなど議論を行う。

4. 研究成果

まず3で述べた方法で正標数におけるトーリック多様体の双対欠損を調べたが、思うような結果は得られなかった。そこでサーキットやトロピカル幾何を用いた複素数体上の既存の記述と比較などをしたが、そこでも新たな記述を得ることはできなかった。

一方でそれらの研究の過程で以下のような結果が得られた。

(1) 代数幾何の手法を用いたコンピュータビジョンの研究(代数ビジョンと呼ばれることもある)に関連することを調べた。コンピュータビジョンにおいて、「カメラ」とは3次元実射影空間から2次元実射影空間への線形射影(もしくはそれを適当に行列表示したものである)とみなされる。コンピュータビジョンの研究者である Hartley 氏, Schaffalitzky 氏により、いくつかの画像からもともとの3次元の形状を復元する、といった有種の再構成定理(およびその高次元版)が行列の具体的な計算を用いて証明されていた。三浦真人氏、植田一石氏との共同研究で、その再構成定理の代数幾何的な別証明を与えた。その結果は *Canad. Math. Bull.* から出版された。

(2) アーベル多様体上の直線束のシジジーに関する研究を行った。代数多様体の射影空間への埋め込みが与えられた時、その定義多項式の間関係式やその関係式の間関係式等はシジジーと呼ばれる。「 p 番目までのシジジーが単純になる」とき、その埋め込みは条件 (N_p) を満たすという。一般にこの条件が満たされるかどうかを確認するのは容易でないことが多いが、アーベル多様体の場合は比較的よくわかっている。

(2-1) アーベル曲面の場合に Küronya-Lozovanu により、適当な数値的条件のもと条件 (N_p) が満たされるという結果が知られていたが、その数値的条件を少し弱めることができた。

(2-2) Pareschi 氏, Jiang 氏, Caucci 氏により、偏極アーベル多様体に対し basepoint-freeness threshold という不変量(以下 BFT と略す)が定まり、その不変量が小さいならば偏極を与える直線束は (N_p) を満たすことを示した。この不変量を計算、評価する方法を研究し主に以下の結果を得た。

(a) 部分アーベル多様体と直線束の交点数と BFT の関係を調べ、伊藤、Lozovanu 氏、Caucci 氏による (N_p) や BFT に関する予想を3次元の場合に肯定的に解決した。

(b) (d_1, \dots, d_g) 型の一般の偏極アーベル多様体に対し BFT の上界及び下界を求め、 (N_p) が成り立つための十分条件を与えた。特に Fuentes-Garcia 氏の $(1, \dots, 1, d)$ 型の一般の偏極アーベル多様体が射影正規であるための必要十分条件に関する予想を肯定的に解決した。また積 $d_1 d_2 \dots d_g$ が 2^{2g-1} より大きければ、 (d_1, \dots, d_g) 型の一般の偏極アーベル多様体は (N_0) を満たすことを示した。

(c) Pareschi 氏, Popa 氏はアーベル多様体上の層に対し M -regular という概念を導入し、それを用いて層が大域切断で生成される十分条件などを与え、その応用として (N_p) や jet ampleness などの直線束の正值性に関する結果を得た。当該年度はその十分条件を BFT を用いて精密化し、Pareschi 氏, Jiang 氏, Caucci 氏, Popa 氏らによる (N_p) や jet ampleness の結果を一般化した。

(d) (c)の結果を用いて、アーベル多様体上の射影束の普遍直線束 $O(1)$ が (N_p) をみたすための十分条件を与えた。

以上の結果は Comm. Algebra, Algebraic Geometry, Math. Nachr., Trans. Amer. Math. Soc., Bull. Lond. Math. Soc., Adv. in Geom. から出版された。

(3) セシャドリ定数とは代数多様体上の直線束の正值性を測る不変量(非負実数)である。Florin Ambro 氏との共同研究では、まずトーリック多様体の場合にセシャドリ定数が多面体の n 番目の逐次最小という不変量の類似であることを観察した。ここで n は考えている代数多様体(もしくは多面体)の次元であり、逐次最小は多面体の「大きさ」を測る不変量である。その観察をもとにトーリックとは限らない代数多様体上の直線束に対し、 i 番目のセシャドリ定数(ただし i は 1 から n までの整数)を定義し、トーリック多様体の場合にはそれが多面体の i 番目の逐次最小の類似であることを示した。また i 番目のセシャドリ定数の性質をしらべ、特に逐次最小に関するミンコフスキーの第二定理の類似を i 番目のセシャドリ定数について証明した。以上の結果は Adv. in Math. から出版された。

また 2 次元の場合に上記の論文で示した不等式の評価を改良したものを示し、プレプリントとして公開した。

(4) ファノ多様体 X の K 安定性は、テスト配置のドナルドソン-二木不変量の正負を見ることで定義される。また X の自己同型群が簡約でないときは X が K -poly 安定ではないことが知られている。Codogni 氏と Dervan 氏は、自己同型群が簡約でない場合、その冪単根基を用いて定義される Loewy テスト配置(もしくはその類似物)のドナルドソン-二木不変量が負になると予想した。具体的なある 3 次元トーリックファノ多様体の Loewy テスト配置とドナルドソン-二木不変量を計算することにより、その予想の反例を与えた。この結果は Ann. Inst. Fourier から出版された。

(5) Ching-Jui Lai 氏, Sz-Sheng Wang 氏との共同研究で、いくつかの 3 次元カラビ-ヤウ多様体の双有理幾何を研究し、それらの Q 分解的正規射影代数多様体をすべて求めた。特にこれらのカラビ-ヤウ多様体に対しては、movable cone 予想という、代数多様体上の直線束(の数値的同値類)がなす錘に関する予想が成り立つことを確認した。この結果は J. Geom. Phys. から出版された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Ambro Florin, Ito Atsushi	4. 巻 420
2. 論文標題 Corrigendum to "Successive minima of line bundles" [Adv. Math. 365 (2020) 107045]	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108966 ~ 108966
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2023.108966	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ito Atsushi	4. 巻 71
2. 論文標題 Examples on Loewy filtrations and K-stability of Fano varieties with non-reductive automorphism groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 515 ~ 537
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/aif.3395	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ito Atsushi, Miura Makoto, Okawa Shinnosuke, Ueda Kazushi	4. 巻 26
2. 論文標題 Derived equivalence and Grothendieck ring of varieties: the case of K3 surfaces of degree 12 and abelian varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-020-00561-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ito Atsushi, Miura Makoto, Ueda Kazushi	4. 巻 -
2. 論文標題 Projective Reconstruction in Algebraic Vision	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008439519000687	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Furukawa Katsuhisa, Ito Atsushi	4. 巻 -
2. 論文標題 A Combinatorial Description of Dual Defects of Toric Varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219199720500017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ambro Florin, Ito Atsushi	4. 巻 365
2. 論文標題 Successive minima of line bundles	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2020.107045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ito Atsushi	4. 巻 46
2. 論文標題 A remark on higher syzygies on abelian surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 5342 ~ 5347
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2018.1464172	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Atsushi	4. 巻 9
2. 論文標題 Basepoint-freeness thresholds and higher syzygies of abelian threefolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 762 ~ 787
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14231/AG-2022-023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ito Atsushi	4. 巻 375
2. 論文標題 M-regularity of Q -twisted sheaves and its application to linear systems on abelian varieties	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 6653 ~ 6673
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8725	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Atsushi	4. 巻 296
2. 論文標題 Higher syzygies on general polarized Abelian varieties of type $(1, \dots, 1, d)$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 3395 ~ 3410
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.202100113	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Atsushi	4. 巻 55
2. 論文標題 Projective normality and basepoint freeness thresholds of general polarized abelian varieties	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2793 ~ 2816
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12895	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Atsushi	4. 巻 24
2. 論文標題 On syzygies of projective bundles on abelian varieties (Raychaudhury Debaditya "Continuous CM-regularity and generic vanishing"の付録)	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Advances in Geometry	6. 最初と最後の頁 34 ~ 36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/advgeom-2023-0028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Atsushi, Lai Ching-Jui, Wang Sz-Sheng	4. 巻 195
2. 論文標題 The movable cone of Calabi-Yau threefolds in ruled Fano manifolds	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 105053 ~ 105053
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2023.105053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 14件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 Projective normality of general polarized abelian varieties
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 Review of some recent results on linear systems on abelian varieties
3. 学会等名 第1回熱海代数幾何学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 伊藤敦
2. 発表標題 Projective normality of general polarized abelian varieties
3. 学会等名 K3, Enriques Surfaces, and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 Linear systems on general polarized abelian varieties of type $(1, \dots, 1, d)$
3. 学会等名 都の西北 代数幾何学シンポジウム 2021 「接束の正值性とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 Linear systems on abelian varieties via M-regularity of \mathbb{Q} -twisted sheaves
3. 学会等名 第66回 代数学シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 Linear systems on abelian varieties
3. 学会等名 第16回代数・解析・幾何学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 On Loewy filtrations and K-stability of Fano varieties with non-reductive automorphism groups
3. 学会等名 Differential, Algebraic and Topological Methods in Complex Algebraic Geometry(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 On Loewy filtrations and K-stability of Fano varieties with non-reductive automorphism groups
3. 学会等名 Algebraic Geometry in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 On Loewy filtrations and K-stability of Fano varieties with non-reductive automorphism groups
3. 学会等名 Workshop on Birational Geometry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 On a generalization of Seshadri constant
3. 学会等名 Toric geometry, degenerations and related topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 On reconstruction problem in algebraic vision
3. 学会等名 Classification and Moduli Theory of Algebraic Varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 On Grothendieck ring of varieties and derived equivalence
3. 学会等名 Second Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 On Grothendieck ring of varieties and derived equivalence
3. 学会等名 The 11th Conference on Arithmetic and Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤 敦
2. 発表標題 A remark on higher syzygies on abelian surfaces
3. 学会等名 Higher dimensional algebraic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Atsushi Ito https://sites.google.com/site/atsushiito221/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ルーマニア	IMAR			
台湾	National Cheng Kung University	Academia Sinica		