

令和 4 年 6 月 5 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14164

研究課題名(和文)アーベル圏のスペクトラムによるネーター環論の新展開

研究課題名(英文) New development of the theory of noetherian rings using spectra of abelian categories

研究代表者

神田 遼 (Kanda, Ryo)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：50748324

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：環上の加群の圏やスキーム上の準連接層の圏の持つ性質を抽象化した概念であるアーベル圏に対して、それに付随する空間であるスペクトラムに関する研究を行った。アーベル圏のスペクトラムについての一般的な理論の構築を進展させるとともに、具体的な環のクラスとして楕円代数についての共同研究も実施し、それに付随する空間に関する結果も得ることができた。ネーター代数と呼ばれるクラスの環に関する共同研究では、平坦余ねじれ加群の同型類がスペクトラムを用いて記述できることを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究でアーベル圏のスペクトラムの理論を整備することによって、既存の環論の定理に別証明を与え、より見通しよく理解できるようになった。代数多様体に対する応用としては、その準連接層の圏について、期待されていた性質を証明することができた。平坦余ねじれ加群の概念は近年、環の導来圏を理解することに用いられており、特定のクラスの環に対しては、その平坦余ねじれ加群の記述を利用して理論が構築されている。ネーター代数に対して平坦余ねじれ加群を記述する本研究は、そのような理論をネーター代数に拡張するための基礎となるものである。

研究成果の概要(英文)：An abelian category is a notion that generalizes the category of modules over a ring and the category of quasi-coherent sheaves on a scheme. I researched the spectrum of an abelian category, which is a space associated with the abelian category. I developed the general theory of the spectrum of an abelian category, and also conducted joint work on elliptic algebras, as an example of a concrete class of rings, and we obtained results on the spaces associated with them. In joint work on the class of rings called Noether algebras, we described isomorphism classes of flat cotorsion modules in terms of the spectrum.

研究分野：環論

キーワード：アーベル圏 Grothendieck圏 アトム・スペクトラム モレキュール・スペクトラム Feigin-Odesskii 楕円代数 点スキーム ネーター代数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

(1) アーベル圏は環上の加群の圏やスキーム上の準連接層の圏の持つ性質を抽象化した概念であり、代数学において広く用いられる。アーベル圏に対して、それに付随する位相空間であるスペクトラムを考えることは、1962年の Gabriel の論文で提示された古典的な手法であるが、本研究開始前の研究代表者の研究において、このスペクトラムの理論が従来のネーター環の理論の一部を一般化し、既存の定理に新たな視点を与えることが期待された。また、本研究開始前の研究代表者の研究では、色付きクイバーの概念を用いたアーベル圏の構成方法が確立されており、スペクトラムの研究において有用な様々なアーベル圏の例が構成できるようになっていた。

(2) 非可換正則代数の分類は非可換代数幾何学における主要な問題の 1 つであるが、Sklyanin 代数と呼ばれる代数のクラスが、非可換正則代数の典型例として知られている。高次元の Sklyanin 代数は Feigin と Odesskii によって 1990 年頃から研究されていたものであるが、Feigin と Odesskii は高次元 Sklyanin 代数よりも一般の代数を調べていた。これを Feigin-Odesskii 楕円代数と呼ぶ。Sklyanin 代数に対しては、それに付随する幾何学的なデータから代数を復元することができ、そのような幾何学的描写を用いることで、Sklyanin 代数の様々な代数的性質が明らかになっていた。一方、Feigin-Odesskii 楕円代数に対してはそのような幾何学的描写は一般には存在せず、定義そのものも難解であることから、この研究に取り組む研究者が少ない状況であった。

(3) Enochs は 1984 年の論文で、可換ネーター環上の平坦余ねじれ加群の同型類が、素イデアルによって記述できることを明らかにした。近年の導来圏の研究においては、この平坦余ねじれ加群を用いた手法が積極的に用いられるようになり、Enochs による記述を、より広いクラスの環に一般化することが期待されていた。

## 2. 研究の目的

(1) アーベル圏のスペクトラムの理論の整備を進め、Grothendieck 圏などの広いクラスのアーベル圏に対する一般論を構築するとともに、既存の環論の定理を一般化すること、およびスキーム、特に代数多様体に対して、その準連接層の圏の理解を深めることが目的である。

(2) Feigin-Odesskii 楕円代数についての、Feigin と Odesskii による一連の論文は難解であり、一部の定理に対しては十分な証明が付けられていないことが研究の妨げになっていた。それらの定理の証明を読み解き、完全な証明を付けると共に、Feigin-Odesskii 楕円代数に付随する空間である点スキームをよりよく理解することが目的である。

(3) Enochs による可換ネーター環上の平坦余ねじれ加群の同型類に対する記述を、非可換なネーター代数に対して一般化することが目的である。

## 3. 研究の方法

(1) ネーター環に対して知られていた直既約移入加群と素イデアルに関する Gabriel の結果を、Grothendieck 圏に対する 2 種類のスペクトラムの関係として定式化し、Gabriel の結果のアーベル圏に対する一般化を行うことを主たる研究手法とした。

(2) Alex Chirvasitu 氏および S. Paul Smith 氏と共に、Feigin-Odesskii 楕円代数を代数・幾何・解析の様々な方法を用いて包括的に調べる。特に、Feigin と Odesskii によって導入されていた特性多様体の概念を、点スキームの言葉で厳密に定式化し、それを用いて楕円代数に何らかの幾何学的描写を与えることを主たる研究手法とした。

(3) ネーター環の特別なクラスであるネーター代数に対しては、Gabriel の結果により直既約移入加群と素イデアルが 1 対 1 に対応することが知られている。中村力氏と共同研究を行い、Gabriel の結果を用いて、平坦余ねじれ加群の同型類に対する記述を得ることを主たる研究手法とした。

#### 4. 研究成果

(1) 研究代表者は、Grothendieck 圏に対して定義される 2 種類のスペクトラムであるアトム・スペクトラムとモレキュール・スペクトラムの関係、アトム・モレキュール対応を定式化し、ネーター環に対する Gabriel の結果を一般化した。それぞれのスペクトラムの概念を用いることで、考えている Grothendieck 圏の既約性・被約性が 2 種類定義されるが、研究代表者は、アトムを用いた既約性・被約性と、モレキュールを用いた既約性・被約性が、特定の条件下で同値となることを明らかにした。また、これらの既約性・被約性が、局所ネータースキームの既約性・被約性を一般化するものであることも示した。このアトム・モレキュール対応の応用として、ネーター環の局所化に関する結果である Goldie の定理の一部を、特定の条件を満たす Grothendieck 圏に対して一般化した。

2 つの加群の間に定義される Ext 群は、ホモロジー代数における基本的な道具であるが、研究代表者は、アーベル圏のアトム・スペクトラムに対して、その中の 2 つの元の間の Ext 群を定義し、それを用いて移入包絡で閉じる局所化部分圏の特徴付けを行った。

研究代表者は本研究開始前に、色付きクイバーの概念を用いた Grothendieck 圏の構成方法を得ていたが、この構成方法において構成される Grothendieck 圏には、可換ネーター環上の加群の圏とは異なり、compressible という性質を持つ対象がほとんど存在しない場合が多かった。研究代表者は本研究において、色付きクイバーを用いた構成方法の亜種を導入し、十分多くの compressible 対象を持つような Grothendieck 圏を多数構成する方法を確立した。

研究代表者は、Grothendieck 圏に関する理論の応用として、代数多様体に対して、その準連接層の圏において直積が完全となることが、その代数多様体がアフィンであることと同値であることを示した。

(2) Alex Chirvasitu 氏および S. Paul Smith 氏と共同研究を行い、Feigin-Odesskii 楕円代数に関する多数の結果を得て、計 6 本の論文およびプレプリントにまとめて公開した。楕円代数の点スキームは、より一般に定義される概念であるスペクトラムの一部と見なされるものであるが、この点スキームに含まれる代数多様体である特性多様体の構造に関する記述を得た。このことから特に、非可換代数幾何学において盛んに研究されている Sklyanin 代数と比べ、Feigin-Odesskii 楕円代数の構造がはるかに多様であることが示され、その研究の重要性が明らかになった。また、この共同研究の結果の別の帰結として、いくつかの Feigin-Odesskii 楕円代数に対して、その幾何学的描写を得ることに成功した。

(3) 中村力氏との共同研究において、ネーター代数上の平坦余ねじれ加群の同型類を、素イデアルを用いて記述することに成功した。このことから特に、直既約平坦余ねじれ右加群の同型類と、直既約移入左加群の同型類の間の 1 対 1 対応が得られるが、これは Herzog によって存在が示されていた対応の、具体的な記述を与えるものである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 225
2. 論文標題 Extension groups between atoms in abelian categories	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Pure Appl. Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2021.106669	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Alex Chirvasitu, Ryo Kanda, and S. Paul Smith	4. 巻 9
2. 論文標題 Maps from Feigin and Odesskii's elliptic algebras to twisted homogeneous coordinate rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum Math. Sigma	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/fms.2020.60	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 527
2. 論文標題 Finiteness of the number of minimal atoms in Grothendieck categories	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 182-195
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2019.03.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Alex Chirvasitu, Ryo Kanda and S. Paul Smith	4. 巻 372
2. 論文標題 New Artin-Schelter regular and Calabi-Yau algebras via normal extensions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 3947-3983
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7672	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 24
2. 論文標題 Non-exactness of direct products of quasi-coherent sheaves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Doc. Math.	6. 最初と最後の頁 2037-2056
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.25537/dm.2019v24.2037-2056	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 224
2. 論文標題 Construction of Grothendieck categories with enough compressible objects using colored quivers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Pure Appl. Algebra	6. 最初と最後の頁 53-65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2019.04.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Alex Chirvasitu, Ryo Kanda, and S. Paul Smith	4. 巻 581
2. 論文標題 Feigin and Odesskii's elliptic algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 173-225
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.04.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 592
2. 論文標題 Integrality of noetherian Grothendieck categories	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 233-299
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.10.036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計30件(うち招待講演 13件/うち国際学会 12件)

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 京都表現論セミナー, Zoom, オンライン(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Extension groups between atoms in abelian categories
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 Algebraic Geometry Seminar, 大阪大学, 日本
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 International Russian-Japanese Conference on Interaction Between Algebraic Geometry and QFT, Moscow Institute of Physics and Technology, ロシア(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Truncated point schemes of generic graded algebras
3. 学会等名 南大阪代数セミナー, 大阪府立大学, 日本 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 南大阪代数セミナー, 大阪府立大学, 日本 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 The characteristic variety of an elliptic algebra
3. 学会等名 The 8th China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory, 名古屋大学, 日本 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会, 金沢大学, 日本
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 2019 Noncommutative Algebraic Geometry Shanghai Workshop, Fudan University, 中国 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 The characteristic variety of an elliptic algebra
3. 学会等名 第41回可換環論シンポジウム, 倉敷シーサイドホテル, 日本
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 環論・表現論セミナー, 名古屋大学, 日本
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 非可換正則代数とFeigin-Odesskii楕円代数
3. 学会等名 談話会, 大阪市立大学, 日本
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Elliptic algebras
3. 学会等名 第9回 (非)可換代数とトポロジー, 信州大学, 日本 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Elliptic algebras and twisted homogeneous coordinate rings
3. 学会等名 東京可換環論セミナー, 東京大学, 日本 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 Algebra Seminar, University at Buffalo, 米国 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Integrality of noetherian Grothendieck categories
3. 学会等名 Representation Theory and Related Topics Seminar, Northeastern University, 米国 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 Maurice Auslander Distinguished Lectures and International Conference, Woods Hole Oceanographic Institution, 米国 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 Workshop and 18th International Conference on Representations of Algebras (ICRA 2018), Czech Technical University in Prague, チェコ (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Atom-molecule correspondence and classification of subcategories for locally noetherian schemes
3. 学会等名 Prospects for Commutative Algebra, ホテル日航大阪, 日本 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 代数幾何学小研究集会, 大阪大学, 日本
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 Recent developments in noncommutative algebra and related areas, University of Washington, 米国 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Artin-Schelter regular algebras, Calabi-Yau algebras, and superpotentials
3. 学会等名 Algebra and Algebraic Geometry Seminar (Pre-seminar), University of Washington, 米国 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 Algebra and Algebraic Geometry Seminar, University of Washington, 米国 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Normal extensions of Artin-Schelter regular algebras and flat families of Calabi-Yau central extensions
3. 学会等名 環論・表現論セミナー, 名古屋大学, 日本
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 Algebra and Algebraic Geometry Seminar, University of Washington, 米国 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Flat cotorsion modules over Noether algebras
3. 学会等名 東京名古屋代数セミナー, Zoom, オンライン (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Elliptic algebras and twisted homogeneous coordinate rings
3. 学会等名 オンライン可換環論セミナー2021, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 神田 遼, 中村 力
2. 発表標題 Structure theorem for flat cotorsion modules over Noether algebras
3. 学会等名 第53回環論および表現論シンポジウム, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 神田 遼, 中村 力
2. 発表標題 Flat cotorsion modules over Noether algebras and elementary duality of Ziegler spectra
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 神田 遼
2. 発表標題 Exactness of direct products
3. 学会等名 可換環論の新しい融合セミナー II, 大阪市立大学, 日本 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Ryo Kanda <a href="https://ryokanda.net">https://ryokanda.net</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Washington	University at Buffalo		