

令和 2 年 7 月 3 日現在

機関番号：24601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14172

研究課題名(和文) 偏極トーリック多様体の断面不変量と整凸多面体の関係の研究

研究課題名(英文) A study of the relationship between the sectional invariants of polarized toric varieties and integral convex polytopes

研究代表者

川口 良 (Kawaguchi, Ryo)

奈良県立医科大学・医学部・助教

研究者番号：10573694

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,300,000円

研究成果の概要(和文)：トーリック多様体と凸多面体の間には密接な関係があることが知られている。本研究では、この性質を利用して代数幾何学と代数的組み合わせ論の諸問題について関連を調べた。その結果、偏極多様体の断面種数の上限と、凸多面体の体積の下限が同値な公式であることを発見した。また、素数次の Weierstrass 半群は巡回型ならば MP 条件と呼ばれる数値的条件を満たし、一般にはその逆は成り立たないことが知られているが、トーリック型の半群に関しては逆も正しいことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

図形(代数多様体)を方程式の解集合として捉える代数幾何学において、トーリック多様体は多面体の幾何学と深いつながりを持った特殊な多様体群であり、重要な不変量の多くを対応する多面体の形や体積、格子点の数といった情報から読み取ることができる。不変量の一つである断面幾何種数には上限の公式があり、多面体の体積については下限の公式が知られているが、本研究ではこれらの公式が同値(つまり種数が上限に等しいことと対応する多面体の体積が下限に等しいことが同値)であることを発見した。他にも、Weierstrass 半群の巡回性に関する研究を行った。

研究成果の概要(英文)：It is well known that toric varieties are closely related with convex polytopes. In this study, we make use of this property to investigate various problems of algebraic geometry and algebraic combinatorics. As a result, we found the equivalence of the upper bound for the sectional genus of a polarized variety and the lower bound for the volume of a convex polytope. We also conducted a study of Weierstrass semigroups. A Weierstrass semigroup with prime degree satisfies a numerical condition called the MP condition if it is cyclic, but the converse is not valid in general. In this issue, we have proved the converse is true for a semigroup of a pointed curve on a toric surface.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学 偏極多様体 断面幾何種数 トーリック多様体 Weierstrass 半群

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1970年代初頭に Demazure, 三宅, Mumford, 小田らによって確立されたトーリック多様体は、凸多面体の幾何学との間に深い関係を持っており、代数幾何学の問題を組み合わせ論的な手法を使って考えられるという特性を持つ。特に、トーリック多様体上の因子に対しては対応する凸多面体が定義され、非特異性や豊富性の判定、交点数やコホモロジー次元と不変量の計算が多面体の形から調べられるので、盛んに研究が行われてきた。一方、射影代数多様体とその上の豊富な因子を組にして考える偏極多様体は、1970年代前半から藤田によって研究が進められ、断面種数や  $h$ -種数、はしご等の概念が整備され、これらを使った分類理論が始まった。さらに福間によって、これらが第  $i$  断面種数や第  $i$   $h$ -種数といった不変量に拡張された。偏極多様体の視点からすると、先述したトーリック多様体上の因子の研究とは、第 1 断面種数や第 1  $h$ -種数に関する話である。本研究はこうした背景に基づき、トーリック多様体上の因子を偏極多様体ととらえ、一般の第  $i$  断面不変量にまで研究範囲を広げようとするものである。これとは別に、研究代表者は以前の研究で、曲線上の点によって定まる半群として知られる“Weierstrass 半群”についての研究を行い、トーリック曲面上の総分岐点の Weierstrass 半群を、曲線に対応する多角形から求める方法を発見した。Weierstrass 半群に関しては米田氏（神奈川工科大）による多くの結果が知られており、それらと組み合わせることで新しい発見につながる可能性があると考え、Weierstrass 半群についての研究も行う予定とした。

### 2. 研究の目的

第  $i$  断面種数については福間氏（高知大）によりコホモロジーの次元を用いて計算する公式が得られている。トーリック多様体の場合、因子のコホモロジー次元は多面体の格子点の情報に翻訳できるが、これは多面体論を用いると  $h$ ベクトルという概念を用いて計算できる。これはすなわち、第  $i$  断面種数（代数幾何学）と  $h$ ベクトル（多面体論）が、それぞれに関する結果を使いながら双方向的に研究できることを意味している。以上の点や研究背景を踏まえた上で、本研究では以下の通り目標を設定した。

課題 1. 偏極トーリック多様体の第  $i$  断面種数の公式の改良

課題 2. トーリック多様体における Castelnuovo 多様体の決定

課題 3. 整凸多面体の  $h$ ベクトルが満たす関係式の研究

課題 4. トーリック曲面上の曲線に対し、巡回型の Weierstrass 半群について考察する

課題 2 について、偏極多様体の断面種数には上限が存在することが知られており、断面種数がこれに一致する多様体を Castelnuovo 多様体と呼ぶ。これは Castelnuovo によって研究された極大種数曲線の高次元版である。

### 3. 研究の方法

課題 1 と 2 に対して基本的な考え方は、断面種数をコホモロジー次元で表す式を多面体の  $h$ ベクトルに関する式に翻訳し、そこに  $h$ ベクトルの性質を加味することでどのように変化するかを観察するというものである。凸多面体は代数幾何多様体に比べると扱いが容易で結果が量産される傾向にあるため、研究が先行しやすい。したがって、様々な例を検証してみれば、 $h$ ベクトルの研究の優位性によって何らかの規則性が見出せ、そこから断面種数に関して新しい性質が発見できるものと期待できる。課題 3 はこれとは逆方向の研究である。第  $i$  断面種数には福間によって上限が与えられているが、 $n$ 次元の場合は第 1 から第  $n - 1$  までの不等式が存在することになり、一つの多面体の  $h$ ベクトルに対して  $n - 1$  個の関係式が得られる。これだけの数の関係式があれば、それらを組み合わせて  $h$ ベクトルに関して新しい性質を発見できる可能性がある。実際、以前の研究では、限定的な状況（非特異な 3次元多面体）ではあるが、 $h$ ベクトルの交代和の非負性を示すことができた。

課題 4 に関して、射影直線の巡回被覆の総分岐点で与えられる Weierstrass 半群は巡回型と呼ばれ、素数次の Weierstrass 半群が巡回型になるための数値的な必要十分条件が Kim 氏（慶尚大）と米田氏により得られている。本研究ではトーリック曲線上の曲線を考えるため、この数値的な条件が多角形の形に関する制限として表現できるはずで、これを使ってトーリック型の Weierstrass 半群の巡回性、特に MP 条件（研究成果の項を参照）との関係について詳細な研究を行う。この研究は、研究協力者の米田氏と定期的に会って議論を行いながら進めていく。

### 4. 研究成果

課題 2 と 4 に関しては十分な結果が得られた。

課題 2. 凸多面体には体積の下限公式が存在する。本研究では偏極トーリック多様体  $(X, L)$  が Castelnuovo 多様体であること（つまり断面種数が上限に一致すること）と、 $(X, L)$  に対応する多面体の体積が下限に等しいことが同値であることを証明した。これは、Gorenstein トーリック Fano 多様体と反射的多面体に対応しているという事実の一般化にあたる。この結果は論文にまとめて投稿し、現在査読中である。反射的多面体は Fano 多様体に対応していることから、多面体論においてこれまで盛んに研究対象とされてきたが、本研究の結果は、より一般に下限の体積を持つ多面体全体を研究することの重要性を示唆している。

課題 4. 素数次の巡回型半群は、必ず MP 条件と呼ばれる数値的条件を満たすことが知られている。次数が 7 以下の場合はこの逆も正しいが、11 次以上では正しくないことが知られていて、

半群の巡回性とMP条件の間にどの程度の差異があるのかは分かっていない。本研究では、トーリック曲面上に乗っている曲線の総分岐点(TS型半群と呼ぶ)について考察し、この範囲ではWeierstrass半群が巡回型であることとMP条件を満たすことが同値になるという事実を証明した。こちら論文にまとめ、Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series (51)に掲載された。この結果は、TS型半群が一般の半群に比べてより数値的に解析しやすい対象であることを意味している。したがって今後は、例えば次数が素数でない場合に同様のこと(巡回性を数値的な条件で表現できるか?)を考えるのも興味深い問題である。

課題1は、hベクトルの性質を用いることでわずかに公式の改良ができたものの、期待したほどの成果は得られなかった。

課題3の研究はまだ完了していないが、研究方法の項で述べたように第i断面種数の上限公式をhベクトルの式として翻訳して組み合わせることで、これまでに知られているものとは異なる関係式が得られることが分かってきた。ただし、体系的な結果としてまとめるには至っておらず、これが真に新しい式なのかの検証も含めて次年度以降の研究課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kawaguchi Ryo, Komeda Jiryo	4. 巻 51
2. 論文標題 Weierstrass Semigroups Satisfying MP Equalities and Curves on Toric Surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series	6. 最初と最後の頁 107-123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00574-019-00145-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 川口良	4. 巻 -
2. 論文標題 偏極トーリック多様体の断面種数の上限	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 射影多様体の幾何とその周辺2017報告集	6. 最初と最後の頁 99-112
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 3件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Ryo Kawaguchi
2. 発表標題 The volume of polytopes associated to Castelnuovo varieties
3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川口良
2. 発表標題 トーリック多様体におけるCastelnuovo多様体の性質
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 川口良
2. 発表標題 偏極トーリック多様体の断面幾何種数の上限
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川口良
2. 発表標題 トーリック曲面上の曲線とワイエルシュトラス半群のMP条件
3. 学会等名 第5回代数幾何研究集会 - 宇部 - (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	米田 二良  (Komeda Jiryo)  (90162065)	神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授   (32714)	