

令和 2 年 6 月 10 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14177

研究課題名(和文) 整凸多面体のCayley分解を巡る構造解析及び関連する諸問題の解決

研究課題名(英文) Analysis of Cayley decomposition of integral convex polytopes and solutions of related problems

研究代表者

東谷 章弘 (HIGASHITANI, Akihiro)

大阪大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：60723385

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目的は、整凸多面体のCayley分解の組合せ論的構造の解析である。具体的な研究課題は、「Cayley予想の完全解決」および「Cayley分解とEhrhart多項式の関連性の解明」である。整凸多面体は、様々な分野に登場する数学的对象であるが、本研究は整凸多面体の本質的な構造の1つであるCayley分解をより深く研究することを目的としている。

研究期間の3年間で、5本の学術論文、6件の学会発表など、様々な研究成果をあげることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、整凸多面体に関する研究の一種である。整凸多面体とは、例えば「ナップサック問題」と呼ばれる整数計画問題の文脈でも現れる対象であり、応用数学などにおける分野でも非常に重要な対象として知られている。

3年間実施した本研究は、整凸多面体の「Cayley分解」と呼ばれる特殊な構造の有無に注目し、様々な研究を展開した。今後は、本研究の成果を元に、整数計画問題への応用も見据えた研究が可能となる。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research project is the analysis of the combinatorial structure of Cayley decompositions of integral convex polytopes. As concrete problems, the complete solution of "Cayley conjecture" and the investigation of the relationship between Ehrhart polynomials and Cayley decompositions of integral convex polytopes are investigated. Integral convex polytopes are a mathematical object appearing in various branches. The purpose of this research project is to a deep approach to the essence of Cayley decompositions of integral convex polytopes, which are one of the most essential structure of integral convex polytopes. As the results of this project for three years, five research articles have been written and six research talks have been given.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：整凸多面体 Cayley分解 Ehrhart多項式

## 1. 研究開始当初の背景

整凸多面体とは、頂点の座標が全て整数であるような凸多面体のことを指す。整凸多面体は、様々な分野において登場する重要な数学的対象の1つであり、広く研究が展開されている。整凸多面体は、代数幾何・可換環論・最適化・統計学など、様々な分野において登場し、本質的な役割をしばしば担うので、整凸多面体の構造解析を行うことで深い理解ができれば、その波及効果は大きい。特に近年、整凸多面体の“Cayley分解”と呼ばれる概念が注目されている。整凸多面体のCayley分解に関する未解決問題の一つに「Cayley予想」があげられ、近年盛んに研究されている。そのような学術的背景も踏まえ、整凸多面体のCayley分解に関する研究に着手することに決めたのである。

一方で、整凸多面体の重要な不変量の1つである「Ehrhart多項式」は、整凸多面体に含まれる整数点の個数を反映した数え上げ関数のことであり、数え上げ組合せ論において盛んに研究されている組合せ論的対象である。整凸多面体のCayley分解とEhrhart多項式のいずれも重要な概念であるにも関わらず、その両者の関係性に関する研究はほとんど行われていなかった。

そこで本研究では、整凸多面体のCayley分解を巡る構造解析を進展させるため、「Cayley予想の解決」および「Cayley分解とEhrhart多項式の関係性の解明」を両輪として研究を進めることにした、というのが研究を開始した当初の研究背景である。

## 2. 研究の目的

上記の通り、本研究の目的は、整凸多面体の構造解析の一環として、Cayley分解に関する研究を展開することである。本研究におけるより具体的な研究課題として、Cayley分解に関する以下の2つの研究課題(A)(B)に取り組む。

(A) Cayley予想の完全解決

(B) 整凸多面体のCayley分解とEhrhart多項式の関係性の解明

研究課題(A)に関して、整凸多面体に対して「次数」と呼ばれる量があり、整凸多面体のある種の“大きさ”を測るものとして知られており、例えば次数が小さい整凸多面体は次元が大きくても比較的扱いやすいという性質がある。Cayley予想とは、一言で述べると、「次元に比べて次数が小さい整凸多面体はCayley分解を持つか？」を問う予想である。Cayley予想は、非特異凸多面体やGorenstein凸多面体などといった整凸多面体のクラスに対して正しいことがすでに証明されているが、大部分が未解決のままである。Cayley分解可能性は、代数幾何的な文脈でも登場する重要な概念であり、多方面において重要な問題である。

研究課題(B)に関して、 $d$ 次元整凸多面体 $P$ に対し、 $P$ を $n$ 倍に膨らませたものに含まれる整数点の個数を表した数え上げ関数 $E_P(n)$ を考えると、「 $E_P(n)$ は $n$ に関する $d$ 次多項式になる」が1962年にEhrhartによって証明された。以降、この多項式 $E_P(n)$ に関する幅広い研究が展開され続けている。一方で、整凸多面体の次数は、Ehrhart多項式の母関数においても自然に現れる量であり、Ehrhart多項式との相関もある。整凸多面体を語る上で欠かせない対象であるEhrhart多項式と整凸多面体の構造論における重要な要因であるCayley分解に関する関連性を研究するという着想は、自然なものである。

## 3. 研究の方法

上記の研究課題(A)および(B)に対し、研究方法はいずれも共通して、具体例の徹底的な計算から一般的な状況を予想して課題の解決を試みる、という手法で研究を進める。

研究課題(A)に対し、まずは“次元に対して次数が小さい整凸多面体”について研究を行う。次数 $s$ の $d$ 次元整凸多面体 $P$ に対し、 $P$ の頂点数を $d+1+c$ としたとき「 $d \leq c(2s+1)+4s-1$ が成り立つならば、 $P$ は常にCayley分解できる」という性質が知られている。そこでまずは、この不等号の等号が成立する整凸多面体に対して、Cayley予想の真偽について詳細に研究する。特に、 $c=0$ の場合、つまり、 $P$ が整単体の場合においては、様々な計算テクニックが確立されているので、それらを駆使して上記の研究に着手する。一方で、Cayley予想の代数幾何的観点からの研究も展開する。具体的には、上記の不等号の等号が成立する場合などの整凸多面体に付随するトーリック多様体の代数幾何的性質を詳細に調べることで、Cayley分解への理解を試みるというものである。これらの取り組みがうまくいかなかった場合は、適宜考察する整凸多面体のクラスを限定して研究を行う。例えば、比較的扱いやすい整単体や、頂点の座標が全て0か1である $(0,1)$ 多面体について研究を展開する。

研究課題(B)に対し、まずは整凸多面体のEhrhart多項式に関する情報収集に努める。Ehrhart多項式をCayley分解の観点からの研究が極めて稀有であるため、まずは本研究を展開するうえで有益となり得る情報を、様々な研究分野の観点から収集する。情報がある程度収集できた後、整凸多面体のEhrhart多項式をCayley分解の観点から考察するため、Cayley分解された数多くの例に対して、それらの整凸多面体のEhrhart多項式を計算しておく。その後、どのように研究を展開するかは、初期に行う情報収集次第ではあるが、例えば、Ehrhart多項式の係数の非負性・

Ehrhart 多項式の零点の振る舞い・Ehrhart 多項式の母函数の性質 (unimodal 性など) が挙げられる。さらに Ehrhart 多項式もやはり代数幾何的にも重要であるため、研究課題 (B) に対しても代数幾何的観点からの研究を行う。

#### 4. 研究成果

本研究の主な研究成果として、5本の学術論文の執筆、および、6件の学会講演を行った。

1本目の共著論文“Interlacing Ehrhart polynomials of reflexive polytopes”では、整凸多面体の Ehrhart 多項式の零点の振る舞いの研究として、有限グラフに付随する反射的凸多面体というクラスに対して、あるグラフのクラスに対してその Ehrhart 多項式が interlacing という性質を満たすことを示した。系として、零点の実部が全て  $-1/2$  となることを証明した。2本目の単著論文“Lattice simplices of maximal dimension with a given degree”では、次元に対して次数が最小(言い換えれば、次数に対して次元が最大)な整単体を分類したものである。さらにその分類結果を用いて、Cayley 予想の反例を構成することに成功した。したがって、本研究課題の2本の柱のうちの1本である「Cayley 予想の解決」が、否定的にはあるが、ある意味解決したのである。3本目の共著論文“Universal inequalities in Ehrhart Theory”では、整凸多面体の Ehrhart 多項式の母函数に現れる整数列である  $h^*$ 列と呼ばれるものに関する研究である。既存の研究における  $h^*$ 列に関する不等式は、すべて次元か次数に依るものであった。しかし本論文において、ある意味で“普遍的な”不等式として、次元にも次数にも依らないものが成立することを証明した。本研究を先駆けとして、今後整凸多面体の  $h^*$ 列に関する普遍的な不等式に関する研究が発展していくと思われる。4本目の共著論文“Smooth centrally symmetric polytopes in dimension 3 are IDP”では、「小田予想」と呼ばれる重要な予想を3次元中心対称非特異凸多面体に対して証明した。小田予想は、非特異凸多面体は IDP か? という予想であり、大部分が未解決であったが、本論文により、部分的な解決が与えられた。5本目の論文“Arithmetic Aspects of symmetric edge polytopes”では、1本目の論文の続編である。より具体的には、1本目の論文で考察したグラフのクラスをさらに広げ、その Ehrhart 多項式の満たす条件をより詳細に調べたものである。

本研究において、特に2本目の単著論文によって当初の目標であった「Cayley 予想の解決」を(否定的に)解決したのみならず、Ehrhart 多項式の零点の性質を中心に、整凸多面体の Ehrhart 多項式の様々な性質を解明することに成功した。総括して、本研究は順調に展開され、満足のいく形で完成したと言える。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 5件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Katharina Jochemko, Mateusz Michalek	4. 巻 65
2. 論文標題 Arithmetic Aspects of symmetric edge polytopes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematika	6. 最初と最後の頁 763--784
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Matthias Beck, Christian Haase, Akihiro Higashitani, Johannes Hofscheier, Katharina Jochemko, Lukas Katthaen, Mateusz Michalek	4. 巻 23
2. 論文標題 Smooth centrally symmetric polytopes in dimension 3 are IDP	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annals of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 255--262
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Gabriele Balletti and Akihiro Higashitani	4. 巻 227
2. 論文標題 Universal inequalities in Ehrhart Theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 843--859
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Akihiro Higashitani	4. 巻 68
2. 論文標題 Lattice simplices of maximal dimension with a given degree	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 193--201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Mario Kummer and Mateusz Michalek	4. 巻 23
2. 論文標題 Interlacing Ehrhart polynomials of reflexive polytopes	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 2977--2998
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-017-0350-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Regular unimodular triangulations of dilated empty simplices and Grobner basis
3. 学会等名 JCCA 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Characterization problem on Ehrhart polynomials of lattice polytopes
3. 学会等名 AlgebraGeometryCombinatorics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 有限グラフに付随する反射的凸多面体の $\delta$ 列について
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 格子の分類と整単体の分類
3. 学会等名 広島組合せ論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Characterizations for the $h^*$ -vectors of lattice polytopes
3. 学会等名 Interactions with Lattice Polytopes（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 Characterization problem on Ehrhart polynomials of lattice polytopes
3. 学会等名 Hakata Workshop; Winter Meeting 2018（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<a href="http://sv2-mat.ist.osaka-u.ac.jp/~higashitani/index.html">http://sv2-mat.ist.osaka-u.ac.jp/~higashitani/index.html</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----