

令和 4 年 6 月 24 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14180

研究課題名（和文）4次元多様体のハンドル分解とデーン手術の研究

研究課題名（英文）Research of handle decompositions of 4-manifolds and Dehn surgeries

研究代表者

丹下 基生 (Tange, Motoo)

筑波大学・数理解物質系・准教授

研究者番号：70452422

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：単連結な4次元多様体上のエキゾチックな微分構造は一般的にコルクという可縮多様体のツイストによって実現できることが知られている。この研究課題では、コルクがどのようにしてエキゾチックな4次元多様体族と関連しているか、またコルクがどのような性質を持つかを明らかにした。例えばある4次元多様体の族が、あるコルクによって得られた時のヒーゴルフレアホモロジーに与える制限などである。レンズ空間を生むデーン手術をもつ結び目にはそのアレクサンダー多項式に特別な制約があることがわかっていて、この研究では、非ゼロ曲線の手法を用いることで、そのような制約としてより深いものを得ることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様体論の研究は、この世に存在するなめらかなあらゆる図形を研究する学問である。4次元多様体論では、4次元時空がどのようなトポロジカルな構造を持っているのか、持ちうるのかということに関係する。また時空に限らず4次元の空間そのものがもつ特徴や特徴づけが得られる。3次元多様体論においても基本姿勢は同じである。デーン手術とは、結び目をもつ複雑さを用いて、その結び目の周りで行える手術とできる多様体の多様性として実現するものである。これは3次元多様体の可能性を示唆するものとして意義深い。このように図形のトポロジーの分類という極めて基本的な内容を扱うことで、社会的にも広範な応用が期待されると考えている。

研究成果の概要（英文）：It is well-known that any exotic differential structure on any simply-connected 4-manifold is realized by a cork twist, which is a surgery along a contractible 4-manifold. In this study, we clarified how a cork is related to a family of exotic structures or what properties a cork has. For example, when a family of exotic 4-manifolds is constructed by a cork, we gave a restriction on Heegaard Floer homology of the boundary of the cork.

A knot yielding a lens space by a Dehn surgery has some particular properties for the Alexander polynomial. In this study, by using the notion of a non-zero curve I developed, we are successful in proving deeper restrictions on the Alexander polynomials of lens space knots than the previous ones.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：4次元多様体 微分構造 コルク デーン手術 レンズ空間

1. 研究開始当初の背景

(1) レンズ空間がホモロジー球面から得られる制約についてはこれまで多くの研究があるが、具体的にどのようなホモロジー球面からどのようなレンズ空間を得るかという例はこれまであまり知られてこなかった。アレクサンダー多項式は、レンズ空間手術の問題に関して非常に重要な役割を果たす。しかし、どのようなアレクサンダー多項式によってレンズ空間結び目が得られるかという問題はそれほど明らかになっていない。

(2) 4次元多様体のコルクは、エキゾチック構造を反映させたある可縮な4次元多様体であり、この多様体を考察することが4次元の可微分多様体論において必須となる。これまでの4次元多様体について考察されてきた歴史を考えると多くの議論が必要となる。

ホモロジー球面がある交差形式を持つ4次元多様体の境界となるかという問題はドナルドソンの革新的な結果(対角化定理)以来多くの問題を提示してきた。こうしたゲージ理論の研究は進むが、多様体の構成の方でどのような多様体が存在するかという問題はそれほど進んでいるわけではない。構成の立場から4次元多様体を進めることで多くの有意義な領域が開けると考えられる。

(3) スライスリボン予想とは、4次元球体の境界にあるスライス結び目がいつ4次元球体の中でリボン円盤をはるか?という素朴な問題であり、現在未解決となる。この問題にどのようにアプローチすればよいかということを考える。これまでの研究である穴あきリボン円盤を考え、その変形を考察することで、この予想にアプローチできるということを見つけていた。この手法は、これまで古くは柳川-柳川の論文の中でも本質的に登場し、議論の核となっていた。

2. 研究の目的

(1) レンズ空間を作るようなホモロジー球面の搜索、またあるホモロジー球面がもつレンズ空間手術を持つ結び目の搜索などを行うことでレンズ空間の構成が明らかにすることである。これは、レンズ空間手術を持つ結び目の性質を明らかにすることができ、最終的にこれはレンズ空間予想についてのアプローチになるためである。

(2) コルクがどのような性質をもつか、またそれによってエキゾチック構造の違いとしてどのように影響されるかという問題に取り組むことで4次元多様体の本質に迫ることである。

また、ホモロジー球面がその境界とする4次元多様体とする交差形式にどのような影響を与えるかを明らかにすることでDonaldsonの対角化定理の精密化について考察することである。

(3) 穴あきリボン円盤このアプローチがどの程度上手いくのかについて考察する。これにより、スライスリボン予想がどの程度成り立つのかについて定性的な理解をすることである。

3. 研究の方法

(1) レンズ空間の中のsimple (1,1)結び目の手術を使ってそのデー手術がどのようなホモロジー球面を得るのかということ調べることで、多くのホモロジー球面からのレンズ空間手術を得る。

(2) よく知られたコルクや、その性質を捉えることで、コルクが持つ多くの性質を引き出すことである。ここでは、以前私が構成したAkbulutコルクの分岐被覆によって得られる有限位数コルクである。このコルクはまだ性質がそれほど明らかになっていない。いくつかの性質を突き止める。

Brieskorn ホモロジー球面がどのような交差形式を持つ4次元多様体の境界となるかを考察する。例えば、 E_8 のような具体的な交差形式を持つ4次元多様体として実現できるかなどである。

(3) リボン円盤を拡張した穴あきリボン円盤の変形を調べることでスライスリボン予想が成り立つ条件についての幅広い十分条件を与える。

4. 研究成果

(1) この研究で、私はBrieskorn球面の整数デー手術によって得られるレンズ空間を与えた。レンズ空間の中のsimple (1,1)結び目を用いて多くのホモロジー球面手術を与えた。その結果、多くのBrieskorn球面内のレンズ空間結び目からデー手術によってホモロジー球面を得た。以前ポアンカレホモロジー球面に対して得られていた対象を一般化して得られるもの限定して考えた。 $(2, 3, 6n \pm 1)$ や $(2, 2s+1, 2(2s+1)n \pm 1)$ などのBrieskorn球面にレンズ空間を得る結び目を構成した。また、それらの制限なども考察した。さらに、ザイフェルトではないplumbed 3次元多様体などからもレンズ空間が得られることを示した。

また、結び目のアレクサンダー多項式について得られる制限やその分類手法を与える結果を論文としてまとめた。この結果は以前得られていたものだが、今回の研究課題の間に成果としてまとめることができた。その成果を用いて以下の問題を解決させた。寺垣内氏はレンズ空間を持つアレクサンダー多項式の3番目の項が非自明ならその結び目は $(2, n)$ タイプのトールス結び目であることを予想したが、この予想を解決させた。この仕事は、その後Caudeillによ

て別証明も与えられた。この結果については論文にし、この研究課題進行中に出版された。また、レンズ空間結び目のアレクサンダー多項式の4番目の項についても立てられる同様の予想についても解決させることができた。この結果については現在執筆中となる。

(2) Akbulut コルクの分岐被覆から得られる分岐被覆から作られる有限位数コルクはその境界は双曲構造を持っていた。すべて双曲構造を持つかということは依然わからなかったが、コルクの性質を持たない可縮多様体も存在することことから、コルクの持つ性質として境界の多様体の双曲性があるのではないかと考える。また、境界のヒーゴールフレアホモロジーの reduced part がコルクが与える4次元多様体の variation に制限を与えていることを示し論文にした。この成果は現在投稿中である。

E_8 を交差形式にもつ4次元多様体 W の境界となる3次元多様体 Y の d -不変量は $2 \leq d(Y)$ であることが知られているが、実際そのような Y の d -不変量に上界がないということを証明した。特に $(2, 5, 9)$ を境界を持つ4次元多様体で交差形式が E_8 となるものが存在することを示した。本結果については論文を出版させた。

(3) スライス円盤に関する研究は穴あきスライス円盤の補空間のホモトピー群について着目していくつかの考察を行った。まとまった結果こそ出なかったが、多くの有意義な議論を行うことができた。また、この内容をいくつかの集会で発表させていただいたが、講演後、多くの反響があり関心を寄せていることが分かった。今後この研究を続け多くの成果を得るようにしていく。

上海交通大学の Li Youlin 氏と共同研究を行い、ある Legendrian 結び目の Lagrangian スライス円盤であり、互いに isotopic ではないものが存在することを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 51
2. 論文標題 The third term in lens surgery polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Hiroshima Math. Journal	6. 最初と最後の頁 101-109
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32917/h2020050	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Li Youlin, Tange Motoo	4. 巻 213
2. 論文標題 Smoothly non-isotopic Lagrangian disk fillings of Legendrian knots	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 211 ~ 225
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-020-00575-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 37
2. 論文標題 Boundary-sum irreducible finite order corks	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kobe Journal of Math.	6. 最初と最後の頁 19-31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 70
2. 論文標題 Notes on Gompf's infinite order corks	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Michigan Math. Journal	6. 最初と最後の頁 3-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1307/mmj/1586419413	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tange Motoo	4. 巻 275
2. 論文標題 On the Alexander polynomial of lens space knots	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107124 ~ 107124
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107124	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 70
2. 論文標題 Homology spheres with E8-fillings and arbitrarily large correction terms	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 985-1002
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 -
2. 論文標題 Homology spheres yielding lens spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of Gokova Geometry / Topology conference 2017	6. 最初と最後の頁 73-121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motoo Tange, Yuichi Yamada	4. 巻 26
2. 論文標題 Four-dimensional manifolds constructed by lens space surgeries of distinct types.	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Ramifications	6. 最初と最後の頁 51 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216517500699	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motoo Tange	4. 巻 320
2. 論文標題 Heegaard Floer homology of Matsumoto's manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 475--499
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2017.08.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 丹下基生
2. 発表標題 The third term in lens surgery polynomials
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 丹下基生
2. 発表標題 The third term in lens surgery polynomials
3. 学会等名 結び目の数理III
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 丹下基生
2. 発表標題 接続のなす多様体
3. 学会等名 微分トポロジー'21
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Motoo Tange
2. 発表標題 Lens space knot polynomials and genus-2 Heegaard splitting of S^3
3. 学会等名 Mini-Symposium : Knot Theory on Okinawa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 丹下基生
2. 発表標題 コルクの性質とその応用
3. 学会等名 4-dimensional topology and gauge theory (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Motoo Tange
2. 発表標題 Handle decompositions for slice disks and moves
3. 学会等名 Lefschetz Pencils and Low dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 丹下基生
2. 発表標題 E8交差形式をもつ4次元多様体とcorrection term
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Motoo Tange
2. 発表標題 4-dimensional light bulb theorem by Gabai I
3. 学会等名 Differential Topology 19 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motoo Tange
2. 発表標題 Ribbon disk diagrams in handle decomposition of B_4
3. 学会等名 Mini-workshop on Low Dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Motoo Tange
2. 発表標題 On ribbon disks in handle decompositions
3. 学会等名 Four Dimensional Topology (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Motoo Tange
2. 発表標題 Cork twistings and exotic 4-manifolds
3. 学会等名 Gokova Geometry-Topology conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Motoo Tange
2. 発表標題 Homology spheres yielding lens spaces
3. 学会等名 MIST 2018: Workshop on Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 丹下 基生	4. 発行年 2020年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 216
3. 書名 例題形式で探求する集合・位相	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Webpage of Motoo Tange http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/ Webpage of Motoo Tange http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jndex.html Webpage of Motoo Tange http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jndex.html Webpage of Motoo Tange http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jndex.html 筑波大学研究者総覧 http://www.trios.tsukuba.ac.jp/researcher/0000003271
--

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 微分トポロジー19	開催年 2019年～2019年
---------------------	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	上海交通大学			