

令和 4 年 4 月 29 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14181

研究課題名(和文) 特殊なホロノミー群を持つ多様体の錘特異点を持つ部分多様体の研究

研究課題名(英文) Submanifolds with conical singularities in manifolds with special holonomy

研究代表者

河井 公大朗 (Kawai, Kotaro)

大阪市立大学・数学研究所・特別研究員

研究者番号：60728343

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：多様体がformalになるための障害を与えた。特にMassey積が多くの場合消えることを示した。また、あるリーマン多様体が存在するための障害も与えた。homogeneous pair という概念を導入し、多くの幾何構造のモジュライ空間の幾何構造を明らかにした。calibrated部分多様体のミラーと思えるdHYM, dDT接続を研究した。まず変形理論を確立し、Cayley, associator equalityのミラー版を示した。これにより、dDT接続はミラー体積の最小を与える等の様々な事実を証明した。他に、ミラー体積の負の勾配流の短時間存在と一意性、dDT接続のいくつかの特徴づけを行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様体がformalになる障害を与えることで、formalでない多様体を発見するのをより容易にした。同様に、ある条件をみたさないリーマン多様体の発見もより容易にした。homogeneous pairは、多くの幾何構造のモジュライ空間を含む概念であるので、そのようなモジュライ空間の性質を統一的に扱えるようになる。また部分多様体のミラーが、部分多様体の理論やゲージ理論と多くの類似点を持つことがわかった。更なる類似が成り立つことが期待され、大きな発展が見込まれる。逆に、このミラー側の研究を進展させることで、部分多様体やゲージ理論の研究への応用も期待できる。

研究成果の概要(英文)：I found obstructions for manifolds to be formal. In particular, I showed that the Massey product vanishes in many cases. I also found obstructions for the existence of a certain class of Riemannian manifolds. I introduced the notion of homogeneous pairs, and unraveled the geometric structure of moduli spaces of several kind of geometric structures. I studied dHYM, dDT connections, which can be considered to be mirrors of calibrated submanifolds. I first established the deformation theory and show the mirror version of Cayley, associator equality. This implies various facts such as the property that dDT connections minimize the mirror volume. In addition, I showed the short-term existence and uniqueness of the negative gradient flow of the mirror volume, and gave some characterizations of dDT connections.

研究分野：微分幾何学

キーワード：special holonomy G2多様体 Spin(7)多様体 モジュライ空間 Hessian計量 formality dHYM接続 dDT接続

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

calibrated 部分多様体は、ケーラー多様体の複素部分多様体の一般化とも捉えられる。calibrated 部分多様体は、極小部分多様体の研究に非常に重要である。極小部分多様体は、2 階の偏微分方程式で定義される。一方、calibrated 部分多様体は 1 階のそれで定義され、比較的扱いやすい。(Yang-Mills 接続と ASD 接続のような関係。)また calibrated 部分多様体は、極小部分多様体の研究の観点のみならず、物理学からも注目を集めている。コンパクトカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性は、特異点をもつ特殊ラグランジュ部分多様体を用いて説明できると予想されている。

また Gromov-Witten 不変量を定義するには、概正則曲線のモジュライ空間をコンパクト化して、その上で積分を行って定義された。同様のことを calibrated 部分多様体に対して考える研究も盛んである。しかし calibrated 部分多様体モジュライ空間のコンパクト化は、概正則曲線の場合のようにはいかないことが知られている。モジュライ空間の境界にあたる点は、特異点をもつ calibrated 部分多様体である。したがって、Gromov-Witten 不変量の類似物を定義するには、より特異点の理解を深める必要がある。

2. 研究の目的

上述のように、ミラー対称性との関連や Gromov-Witten 不変量の類似を考えるにあたり、特異点を持つ calibrated 部分多様体の研究がとりわけ重要である。

特異点のうち最も扱いやすいのは錐(cone)の形をした特異点である。そこで、そのような特異点を持つ calibrated 部分多様体に注力して研究を行う。その特異点を持ったままの変形、およびその特異点の解消の様子を明らかにする。扱いやすい特異点を持つ、部分多様体とその上の幾何構造のペアに対しても同様のことを明らかにする。

3. 研究の方法

(1)表現論を用いて、等質な calibrated 錐部分多様体の変形の k 次近似($k = 2, 3, \dots$)を考える。それをもとに、 L 代数等を用いて錐部分多様体の変形の様子を捉える。

(2)カラビ・ヤウ多様体の場合を応用し、 G_2 , $Spin(7)$ の場合に同じ点で錐特異点を持つ多様体とその部分多様体を同時に非特異化する。それにより新しいコンパクトな例も構成する。

(3)ペアのモジュライ空間の局所的性質を、部分多様体だけの場合の手法を応用して調べる。(1), (2)の手法をこの場合にも適用し、ペアのモジュライ空間の境界のある点(扱いやすい特異点を持つ部分多様体と幾何構造のペア)の近傍の様子を理解する。

4. 研究成果

(1)多様体の formality に関する研究

D.Fiorenza 氏、H.V.Le 氏、L.Schwachhofer 氏との議論により、コンパクトリーマン多様体の Hodge 分解の一般化として、Poincare DGCA of Hodge type を導入した。そしてそれが $(r-1)$ connected ($r>1$) の場合には、あるコホモロジー類が formal になるための障害になることを示し、また Massey 積が多くの場合消えることを示した。リーマン多様体への応用として、harmonic 1-form が平行になるような計量(例えば多様体が単連結か、計量が非負の Ricci 曲率を持つ場合)が入るための位相的な障害を与えた。

(2)homogeneous pair の導入

多くの幾何構造のモジュライ空間には、potential function が斉次な Hessian 多様体の構造が入る。Hessian 多様体のあるクラスを含む homogeneous pair という概念を導入し、定曲率計量が入るための条件、測地線、完備化について調べた。これにより、より多くの幾何構造のモジュライ空間の幾何構造を明らかにした。また多様体が 2 次元の場合に、多くの平坦計量が入ることを示した。

特に、コンパクトリーマン多様体上のリーマン計量の全体の空間の完備化に関する Clarke-Rubinstein の結果を拡張することに成功した。また G_2 構造のモジュライ空間には、2 つの自然な計量があることが知られているが、これらの完備化はそれぞれ異なることを示した。

(3)dHYM 接続のモジュライ空間の決定

deformed Hermitian Yang-Mills(dHYM)接続とは、特殊ラグランジュ部分多様体のミラー対称性における対応物である。山本光氏との議論により、dHYM 接続のモジュライ空間の構造を決定し、それはトーラスになることを示した。

(4)G2-dDT 接続の変形理論

G2 deformed Donaldson-Thomas (G2-dDT)接続とは、(co)associative 部分多様体のミラー対称性における対応物である。新しい G2 構造を導入することで、どちらの変形も canonical complex とよばれる楕円形複体の部分複体で記述できることを示した。G2 構造を摂動すると、dDT 接続のモジュライ空間は自然な向きを持つ第一ベッチ数次元の滑らかな多様体になることを示した。

(5)Spin(7)-dDT 接続の変形理論

Spin(7)-dDT 接続とは、Spin(7)構造をもつ多様体上の deformed Donaldson-Thomas 接続の略称で、Cayley 部分多様体のミラー対称性における対応物である。新しい Spin(7)構造を導入することで、Spin(7)-dDT 接続の変形は、canonical complex とよばれる楕円形複体の部分複体で記述できることを示した。またある条件下のもと、Spin(7)構造を摂動するとそのモジュライ空間は自然な向きを持つ滑らかな有限次元多様体になることを示した。

(6)体積汎関数のミラーの研究

Cayley, associator equality は Spin(7),G2 幾何の基本的だが有用な等式である。フーリエ向井変換を用いてそのミラー版を予想し、実際それが成り立つことを示した。これにより、Spin(7),G2-dDT 接続は calibrated submanifold や Spin(7),G2-instanton と同じような性質を多くもつことが確かめられた。(例えば Spin(7),G2-dDT 接続はミラー体積の最小を与え、その値は位相的に与えられること、あるいはホロノミー群が還元したときの対応など。)加えて、(ある適当な条件のもと)平坦束の dDT 接続は平坦接続しかないことを示した。更に、体積汎関数のミラーの負の勾配流(通常の平均曲率流のミラー)を定義し、その短時間存在と一意性を示した。

(7)大体積極限の観点からの存在証明

形式的には、G2-instanton は dDT 接続の「大体積極限」だと思える。(つまり、G2 構造が十分大きいか曲率が十分小さいとき、G2-dDT 接続は G2-instanton とほぼ同じものになる。)またホロノミー群が G2 に一致する多様体上の複素直線束には、常に G2-instanton が存在する。これらの事実を用いて、ホロノミー群が G2 に一致する多様体の「G2 構造が十分大きい」とき、G2-dDT 接続が常に存在することを示した。

(8)multi-moment map での G2-dDT 接続の特徴づけ

G2-dDT 接続の類似の場合である dHYM 接続は、moment map の零点として書けることが知られている。G2-dDT 接続に対しても類似の主張を示した。そのために、moment map の自然な類似である multi-moment map を用いた。ユニタリー接続の空間上にゲージ群の作用で不変な自然な閉 3 形式を定義し、それを用いて、G2-dDT 接続が multi-moment map の零点として書けることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 D. Fiorenza, K. Kawai, H. V. Le and L. Schwachhofer	4. 巻 XXII
2. 論文標題 Almost formality of manifolds of low dimension	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)	6. 最初と最後の頁 79-107
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.201905_002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kawai Kotaro, Van Le Hong, Schwachhofer Lorenz	4. 巻 84
2. 論文標題 Frolicher-Nijenhuis Bracket on Manifolds with Special Holonomy	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lectures and Surveys on G2-Manifolds and Related Topics. Fields Institute Communications	6. 最初と最後の頁 201~215
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-1-0716-0577-6_8	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kawai Kotaro	4. 巻 103
2. 論文標題 Conformal transformations of the pseudo Riemannian metric of a homogeneous pair	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 516~557
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12383	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kawai Kotaro, Le Hong Van, Schwachhofer Lorenz	4. 巻 29
2. 論文標題 Frolicher-Nijenhuis cohomology on G2- and Spin(7)-manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 1850075
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X18500751	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kawai Kotaro	4. 巻 69
2. 論文標題 Second-Order deformations of associative submanifolds in nearly parallel G2-manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Q. J. Math.	6. 最初と最後の頁 241 ~ 270
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/qmath/hax038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawai Kotaro, Le Hong Van, Schwachhofer Lorenz	4. 巻 197
2. 論文標題 The Frolicher-Nijenhuis bracket and the geometry of G2- and Spin(7)-manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Ann. Mat. Pura Appl.	6. 最初と最後の頁 411 ~ 432
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-017-0685-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計27件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Deformed Donaldson-Thomas connections
3. 学会等名 seminar "Cohomology in Algebra, Geometry, Physics and Statistics" (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 deformed Donaldson-Thomas 接続について
3. 学会等名 東工大幾何セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Deformation theory of deformed Hermitian Yang-Mills connections and deformed Donaldson-Thomas connections
3. 学会等名 Virtual meeting in Special Geometries and Gauge Theory (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続と変形ドナルドソン・トーマス接続の変形理論
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Deformed Donaldson-Thomas connections I
3. 学会等名 Seminar Geometry, Topology, and Their Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Deformed Donaldson-Thomas connections II
3. 学会等名 Seminar Geometry, Topology, and Their Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Deformation theory of deformed Donaldson-Thomas connections
3. 学会等名 The 6th workshop "Complex Geometry and Lie Groups" (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 deformed Donaldson-Thomas 接続について
3. 学会等名 九州大学幾何学セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 変形ドナルドソン・トーマス接続の変形理論
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2020
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Poincare DGA of Hodge type とその応用
3. 学会等名 第66回幾何学シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Calibrated submanifolds in G2 manifolds
3. 学会等名 Geometry-Topology Summer School in Nesin Mathematics Village (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Poincare DGA of Hodge type とその応用
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Homogeneous pair の擬計量の共形変形
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Second order deformations of associative submanifolds
3. 学会等名 Dirac operators in differential geometry and global analysis (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Poincare DGA of Hodge type とその応用
3. 学会等名 神楽坂微分幾何学セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Poincare DGA of Hodge type and its applications
3. 学会等名 The second Taiwan- Japan Joint Conference on Differential Geometry (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Frolicher-Nijenhuis cohomology on manifolds with special holonomy
3. 学会等名 Pluripotential Theory, Geometric Analysis and Calibrated Geometry (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Frolicher-Nijenhuis cohomology on manifolds with special holonomy
3. 学会等名 大阪大学数学教室幾何セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 低次元多様体の"almost" formality
3. 学会等名 玉原トポロジー・幾何セミナー2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Associative部分多様体の2次変形
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 ヘッセ計量の共形変形について
3. 学会等名 統計多様体の幾何学とその周辺(10)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Frolicher-Nijenhuis bracket and cohomology on G2-and Spin(7)-manifolds
3. 学会等名 学習院大学トポロジーセミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 特殊なホロノミー群を持つ多様体上のFrolicher-Nijenhuis bracket
3. 学会等名 学習院大学・数学科談話会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Frolicher-Nijenhuis bracket and cohomology on G2- and Spin(7)-manifolds
3. 学会等名 玉原トポロジー・幾何セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kotaro Kawai
2. 発表標題 Frolicher-Nijenhuis cohomology on G2- and Spin(7)-manifolds
3. 学会等名 Workshop on G2 Manifolds and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Frolicher-Nijenhuis bracket and cohomology on G2- and Spin(7)-manifolds
3. 学会等名 第64回幾何学シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 河井 公大朗
2. 発表標題 Frolicher-Nijenhuis cohomology on G2- and Spin(7)-manifolds
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Universita di Roma			
チェコ	Czech Academy of Science			
ドイツ	TU Dortmund University			