

令和 2 年 5 月 27 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14183

研究課題名(和文) 圏を用いた空間の組合せ的同ホトピー論とセンサーネットワークへの応用に関する研究

研究課題名(英文) Combinatorial homotopy theory of spaces and applications to sensor network using categories

研究代表者

田中 康平 (Tanaka, Kohei)

信州大学・学術研究院社会科学系・助教

研究者番号：70708362

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は三角形分割を持つ単体複体や、順序構造を持つ半順序集合の組合せ的同ホトピー論とその応用に焦点を当てた。従来の連続変形に基づく位相空間の同ホトピー論に変わり、組合せ的同ホトピー論は点の消去に基づいている。そのような離散的な操作はアルゴリズムを設計するうえでも扱いやすく、実用的な応用が期待できる。

本研究では組合せ的同ホトピー論の発展、また位相不変量の計算及びオイラー標数を用いたセンサーネットワーク理論への応用を考えた。有限単体複体の数値不変量であるLSやTCは本質的には、有限回の離散的な操作と重心細分で計算できることを示した。さらに、群作用による商圏のオイラー標数もいくつかの例で計算した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は点の消去に基づく組合せ的同ホトピー論の発展を後押しするとともに、それを用いて、ロボットモーション設計やセンサーネットワーク上の数え上げ理論など応用的な分野にアプローチしたものである。空間の複雑さを表す指標としていくつかの位相不変量を組合せ的に計算する方法を導出した。これらは、空間上のロボットの動きを制御するためのアルゴリズムが最低何種類必要かどうかという問題に密接に関わる不変量である。また、周期性や対称性を持つセンサーネットワーク上での効率的なターゲット数え上げ理論についても、いくつかのケースで有効な方法を発見した。

研究成果の概要(英文)：This study focused on development of the combinatorial homotopy theory of simplicial complexes and posets (categories) and its applications. The combinatorial homotopy theory is based on removing points, unlike the classical homotopy theory of spaces based on continuous deformations. Such a discrete operation is compatible with design of algorithms, and we can expect practical applications.

This study developed the combinatorial homotopy theory, and considered applications to computation of topological invariants and sensor network theory with respect to Euler characteristic. We showed that the numerical invariants LS and TC of finite simplicial complexes can be calculated essentially by finite discrete operations and barycentric subdivisions. Moreover, we computed some Euler characteristic of the quotient categories by group actions.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：組合せ的同ホトピー論 単体複体 圏 半順序集合 LS category Topological complexity オイラー標数 センサーネットワーク

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

位相空間のホモトピー論は従来、空間の連続的な変形に基づいて発展してきた。対して、三角形分割を持つ単体複体や、順序構造を持つ半順序集合については、頂点の消去に基づく組合せのホモトピー論の研究が近年盛んになってきている[BM12]。このような離散的な操作で記述されるホモトピー論は、計算のアルゴリズムにも応用が期待できる。実際、組合せ的ホモトピー論を利用して効率的にホモロジー群のベッチ数を計算するソフトウェアも開発されている。

一方で、位相空間の複雑さの指標となる位相不変量の計算も精力的に行われている。古典的なものとしては、最低何枚のボールで空間を覆えるかというアイデアに由来する LS (LS category) が挙げられる。定義は単純であるが、具体的な計算には、空間のコホモロジー群や Ganea ファイブレーションなど代数的位相幾何学の道具を巧みに使う必要がある。類似した不変量としては、近年、ロボットモーション設計と深い関わりのある TC (topological complexity) が精力的に研究されている。TC は空間上のロボットに対し、連続的な移動経路を設定するためには、最低何種類の局所的なアルゴリズムが必要かを定式化したものである[Fa03]。2017 年によりやく基本曲面「クラインの壺」の TC が決定されたことから推察できるように、TC の計算も容易ではない[CV17,Dr17]。

上述したモーション設計問題をはじめ、位相幾何学の実用的な応用が近年精力的に研究されている。古典的な位相不変量として、オイラー標数もまた古くから計算されてきたが、オイラー標数を測度と考え、その積分理論(オイラー積分)をセンサーネットワーク上の数え上げ理論に応用したのは Baryshnikov と Ghrist である[BG09]。彼らはオイラー標数の持つ包除原理とホモトピー不変性に着目し、ダブルカウントをうまく回避するような数え上げの手法を提唱した。

2. 研究の目的

本研究は、空間の連続変形に基づく従来のホモトピー論ではなく、頂点や面の消去に基づいた組合せ的ホモトピー論の理論発展とその応用を目的としている。具体的には次で述べるように、組合せ的ホモトピー論を展開する枠組みの拡充、LS や TC を始めとした位相不変量の組合せ的計算方法の導入、そして行列計算による組合せ的オイラー積分を用いたネットワークグラフ上での数え上げ理論への応用である。

1) 三角形分割を持つ単体複体や、順序構造を持つ有限位相空間(半順序集合)については、従来の連続写像によるホモトピー変形以外にも、頂点や面の消去に基づく組合せ的ホモトピー論が知られている。古典的に知られているのは、単体複体の面の押し潰しから得られる単純ホモトピー論である。また、その特別な場合として、頂点を消去することによる強ホモトピー論も知られている。しかし、単体複体は群作用の商で閉じていないなど、操作の制限が多い。このため、より広いクラスにおいて、同様の操作を定式化することで幅広い用途に用いることができる。

2) LS や TC に代表される位相空間の数値不変量は、不等式で評価する方法は数あれど、完全に決定するのは困難な場合が多い。計算アルゴリズムを構築するためにも、組合せ的ホモトピー論を活用し、離散的かつ有限の操作で LS, TC を決定する方法の確立を目指す。

3) 研究代表者は過去の研究において、離散化したオイラー積分を用いて、ネットワークグラフ上の数え上げ理論を構築した。本研究ではさらにその理論を発展させるため、対称性や周期性など、一般に有限群の作用を持つネットワークについて、効率的なオイラー積分の計算方法を探索する。

3. 研究の方法

1) 従来、単体複体や半順序集合で行われてきた組合せ的ホモトピー論を、複体あるいは非輪状圏へ拡張する。複体は単体複体同様、三角形分割が与えられた空間の組合せ的モデルだが、複数の単体が同一の頂点を共有できるため、単体複体よりも広範囲の空間を扱える。一方、非輪状圏も複数の射を持つことで、唯一の射を持つ半順序集合よりも一般的である。

2) LS や TC の組合せ的近似で重要な役割を果たすのが、単体近似定理である。重心細分を細かくすることで、連続写像を単体写像に近似するという、古典的によく知られた定理であるが、これを用いて不変量の評価を行う。また、重心細分を十分細かくとすることで、LS や TC に収束する形で、評価の精密化を行う。

3) 群 G の作用を持つネットワークグラフ A において、群作用での商 A/G はグラフ(半順序集合)ではなく、圏になる。この商圏のオイラー標数の計算方法を定式化することを目指し、以下の公式が成り立つことを示す：

$$\chi(A/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(A^g)$$

つまり上記の式は、固定部分圏のオイラー標数と、群の位数から計算ができることを意味している。位相空間や集合の場合には、Lefschetz 公式あるいは Burnside の補題として知られているため、圏についてもこの公式が成り立つことを確かめる。

4. 研究成果

1) 単体複体あるいは半順序集合における強ホモトピー論を 複体と非輪状圏にそれぞれ拡張

した。この拡張の中で重要なのは、辺あるいは射の一意性であり、単体複体や半順序集合では見えなかった性質に着目した。同時に、強ホモトピー型の最小モデルが一意的に定まることを示し、複体あるいは非輪状圏については、被約な点や対象を逐一取り除いていくことで、最も小さな部分空間（圏）に到達できることを保証した。

2) LS については、圏の LS を組合せ的に定式化し、細分を細かくすることで、分類空間の LS へ収束することを示した。また、単体複体や半順序集合の LS については、行列の変形を用いて、より機械的な計算方法を提案した。

TC についても、組合せ論的な定式化と精密化を行った。さらに、対称性を考慮した TC については、対称的なホモトピー論と単体近似定理を用意することで、より実用的なロボットモーション設計の組合せ的近似に成功した。

3) 群作用を持つ圏とその商圏については、分類空間との相性が悪いことが知られている。商と分類空間の関係が同相レベルで対応する条件としては、Babson と Kozlov によって必要充分条件が与えられている [BK05]。オイラー標数についても、無条件では先述した Lefschetz 公式 (Burnside の補題) の等式は成り立たないことが、様々な例の計算により判明した。また、いくつかの例では同相ではないが、オイラー標数レベルでは公式を満たすものも確認された。

< 引用文献 >

[BG09] Y. Baryshnikov and R. Ghrist. Target enumeration via Euler characteristic integrals. *SIAM J. Appl. Math.* 70 (2009), no. 3, 825--844.

[BK05] E. Babson and D. Kozlov. Group actions on posets. *J. Algebra* 285 (2005), no. 2, 439--450.

[BM12] J. A. Barmak and E. G. Minian. Strong homotopy types, nerves and collapses. *Discrete Comput. Geom.* 47 (2012), no. 2, 301--328.

[CV17] D. C. Cohen and L. Vandembroucq. Topological complexity of the Klein bottle. *J. Appl. Comput. Topol.* 1 (2017), no. 2, 199--213.

[Dr17] A. Dranishnikov. On topological complexity of non-orientable surfaces. *Topology Appl.* 232 (2017), 61--69.

[Fa03] M. Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.* 29 (2003), no. 2, 211--221.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kohei Tanaka	4. 巻 27
2. 論文標題 Strong homotopy types of acyclic categories and ∞ -complexes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applied Categorical Structures	6. 最初と最後の頁 245-260
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10485-018-9552-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Tanaka	4. 巻 54(2)
2. 論文標題 Symmetric topological complexity for finite spaces and classifying spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topological Methods in Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 477-493
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.12775/TMNA.2019.048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Tanaka	4. 巻 249(2)
2. 論文標題 Lusternik--Schnirelmann category of relation matrices on finite spaces and simplicial complexes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Fundamenta Mathematicae	6. 最初と最後の頁 149-167
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/fm674-8-2019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Kohei	4. 巻 18
2. 論文標題 A combinatorial description of topological complexity for finite spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 779 ~ 796
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2018.18.779	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Kohei	4. 巻 239
2. 論文標題 Lusternik--Schnirelmann category for categories and classifying spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 65 ~ 80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2018.02.031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 Topological and combinatorial approach to symmetric motion planning
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 Topological and combinatorial approach to symmetric motion planning
3. 学会等名 代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 位相的及び組合せの手法を用いたモーション設計
3. 学会等名 数理経済談話会 & トポロジーセミナー (信州大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kohei Tanaka
2. 発表標題 Topological complexity and L-S category for finite spaces
3. 学会等名 Mapping Spaces in Algebraic Topology (Kyoto University) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 Symmetric topological complexity and its combinatorial description
3. 学会等名 ホモトピー沖繩 (沖縄県青年会館)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 Topological and combinatorial methods in motion planning problem
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会(岡山大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 Combinatorial motion planning for finite spaces
3. 学会等名 代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 離散的オイラー積分と数え上げ問題への応用
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 Topological complexity of finite spaces and its combinatorial description
3. 学会等名 新居浜代数トポロジーセミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中 康平
2. 発表標題 Discrete Morse theory and homotopy theory of categories
3. 学会等名 京都大学代数トポロジーセミナー
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----