

令和 4 年 6 月 14 日現在

機関番号：22604

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14185

研究課題名(和文) 偏極多様体の安定性の幾何学

研究課題名(英文) Geometry of polarized varieties and their stability

研究代表者

久本 智之 (Hisamoto, Tomoyuki)

東京都立大学・理学研究科・准教授

研究者番号：00748345

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体の標準計量はいわゆる幾何学的不変式論に由来する安定性と対応すると考えられている(Yau-Tian-Donaldson予想)。一方で、標準計量が存在しないときは多様体を安定な方向に退化させて調べるのが重要なテーマとなる。我々はFano多様体の場合にこの問題を再定式化することで新たに計量の時間発展方程式を導入し、解の存在を証明した。さらにこの解を用いて最適な退化を漸近的に構成した。また、自己同型群が有限でない場合に、安定性から標準計量の存在を示すためのアイデアを提示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体は二次曲線や楕円曲線の一般化であり、数理学全般の中でも極めて基本的な研究対象と言える。代数多様体を分類するという観点に立つと、標準的なケーラー計量の存在問題はごく自然な問題である。一方で、標準的なケーラー計量を持たない多様体も多く存在する。そのような多様体を調べるには、「研究成果の概要」で述べたような最適な退化を研究することが重要である。最適退化に関する我々の一連の研究成果は、この領域の方向を決定づけており、今後の研究の基礎となるものだと考えられる。

研究成果の概要(英文)：The famous Yau-Tian-Donaldson conjecture states that the existence of standard Kahler metric is equivalent to the stability condition which is originated from Mumford's Geometric Invariant Theory. If there does not exist such a standard metric, we want to study a variety degenerating it to the stable one. We gave a new formulation to this problem, introduced a new geometric flow, and showed the existence of the long-time solution. Using this solution we further gave an asymptotic construction of the optimal degeneration. We also provided some ideas to prove the existence of the standard metric when the automorphism group is possibly not finite.

研究分野：複素解析幾何

キーワード：ケーラー・アインシュタイン計量 K安定性 モンジュ・アンペール方程式 乗数イデアル層

## 1. 研究開始当初の背景

代数多様体の標準計量はいわゆる幾何学的不変式論に由来する安定性と対応すると考えられている (Yau-Tian-Donaldson 予想)。一般の偏極代数多様体に対する Yau-Tian-Donaldson 予想は現在でも未解決の問題であるが、Fano 多様体については Chen-Donaldson-Sun によって Kahler-Einstein 計量の存在と K 安定性が同値であることが示されていた。一方で、標準計量が存在しない、すなわち安定でない Fano 多様体はごくありふれたものである。このような一般の Fano 多様体を調べるためには、安定性を測る種々の不変量を最小にするような方向へ多様体を退化させればよいと考えられる。このとき、退化した多様体はある種の標準計量を有し、安定になると考えられていた。実際 Donaldson は 2005 年ごろに Calabi 汎関数の下限が正規化された Donaldson-二木不変量により達成されるという予想を提出している。Calabi 汎関数は Calabi 流と呼ばれる計量の時間発展方程式により最適化されるので、Calabi 流が最適な退化を実現しているのではないかと考えるのは自然である。ところが Calabi 流の解析は難しく、時間大域解の存在すら現在でも未解決である。

## 2. 研究の目的

一般の偏極多様体における標準計量とはスカラー曲率が一定の Kahler 計量を指す。ところが、Fano 多様体の場合この条件は Ricci 曲率が一定であるという条件、すなわち Kahler-Einstein 計量と同値な概念である。Fano 多様体に対する Yau-Tian-Donaldson 予想が比較的簡単なのはこのことに起因する。実際、Kahler-Einstein 計量は Monge-Ampere 方程式と呼ばれる 2 階の非線形偏微分方程式に帰着され、解析する手立てが比較的豊富に存在する。我々はこの点に注目して、Fano 多様体の場合は Calabi 流に代替する計量の時間発展方程式が存在するのではないかと考えた。このような新しい時間発展方程式を導入することで問題を再定式化し、最適退化を構成することが本研究の目的であった。

## 3. 研究の方法

我々はまず Fano 多様体の場合に Ricci ポテンシャル関数を用いることで Calabi 汎関数の亜種を導入し、この汎関数の値が正規化された Ding 不変量によって下から抑えられることを示した。これは前述した Donaldson の結果の類似になっている。そこでこの評価に基づいて最適退化の問題を再定式化し、Calabi 流に代わる新しい計量の時間発展方程式-逆 Monge-Ampere 方程式を導出した。次いで高橋氏、Collins 氏との共同研究において、この時間発展方程式が時間大域解を持つことを示した。時間大域解の存在は解のアプリオリ評価に基づく。中でも重要なのが C0 評価である。この種の非線形微分方程式に対して C0 評価を得るにはいわゆる比較原理を適用するのが定石であるが、逆 Monge-Ampere 方程式ではうまくいかない。そこで変分法的手法を流用するのが新しいアイデアである。すなわち、仮に方程式の解が有限時間で爆発するとしても、その解は弱解の範疇に収まっていることを観察したのである。すると Monge-Ampere 方程式の弱解に対する Kolodziej の評価が適用できて、逆 Monge-Ampere 方程式の C0 評価が得られることが分かった。

この意味で、我々の方法は従来のアプリオリ評価で用いられる方法に複素ポテンシャル論のテクニックを融合させたものだと言える。

次の問題は、逆 Monge-Ampere 方程式からどのようにして最適退化を構成するかということであった。我々は Nadel の古典的な結果にインスピレーションを得て、時間大域解の乗数イデアル層を取ることで最適退化を (漸近的に) 構成した。乗数イデアル層とは計量に鑑みて二乗可積分な正則関数を集めてできるイデアル層であり、これも多変数複素解析的な色合いが強い概念である。実は時間大域解から直接乗数イデアル層を取ることはできないため、多重劣調和函数による Perron envelope を介する必要がある。これも複素ポテンシャル論の技術に根ざしている。

## 4. 研究成果

我々の主要な結果は Fano 多様体に関するものである。特に、最適退化の問題を Ricci ポテンシャル関数を用いて再定式化し、新たな計量の時間発展方程式を導出した。次いで高橋氏、Collins 氏との共同研究において、この「逆 Monge-Ampere 方程式」が時間大域解を持つことを証明した。この共同研究では具体的な Fano 多様体について最適退化を調べるということも実行しており、特にトーリック Fano 多様体については逆 Monge-Ampere 方程式が直接最適退化と結び付けられることを示した。また、退化させた多様体が満洲のソリトン計量と呼ばれる標準計量を持つことも観察している。

その後も独自に研究を続け、逆 Monge-Ampere 方程式の解に対する乗数イデアル層を取れば少な

くとも漸近的に最適退化が構成できることを示した。さらに、同様のアイデアが Kahler-Ricci 流と呼ばれる古典的な幾何学的流にも適用できることを発見し、最適退化についても類似の結果を得た。この方面は現在でも C. Li 氏や C. Xu 氏らによって代数幾何学的な観点から盛んに研究されている。

以上は最適退化に関する研究であったが、標準計量の存在問題についても並行して研究を行い、幾つかの結果を得た。特に上述した満洲のソリトン計量について詳しく調べ、対応する安定性の概念-相対 D 安定性を定義した。さらに、相対 D 安定性と満洲のソリトン計量の存在が同値であることを示した。

また、Yau-Tian-Donaldson 予想への変分法的なアプローチ (Berman-Boucksom-Jonsson) にも興味を持った。従来の結果は自己同型群が有限の場合に限ったものであったが、これを一般の場合に拡張する研究を行なった。具体的には自己同型群を考慮した上で安定性およびエネルギー関数の増大条件を再定義し、その妥当性を示した。この定式化は一般の偏極多様体に対しても通用する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Collins, T. Hisamoto, and R. Takahashi	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 The inverse Monge-Ampere flow and applications to Kahler-Einstein metrics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Jour. Differential Goemetry	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計23件（うち招待講演 23件 / うち国際学会 13件）

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Optimal lower bound of the Calabi type funtionals
3. 学会等名 Pacific Rim Conference in Mathematics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Fano多様体の最適退化の乗数イデアル層による構成
3. 学会等名 東工大幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Limit of the Kahler-Ricci flow and multiplier ideal sheaves optimally destabilize the Fano manifold
3. 学会等名 多変数関数論冬セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Geometric flow, multiplier ideal sheaves, and optimal degeneration of a Fano manifold
3. 学会等名 Grauert theory and recent complex geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Greatest lower bound of the Calabi type functional,
3. 学会等名 The 25th Symposium on Complex Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 ファノ多様体の最適退化とケーラー・リッチフロー
3. 学会等名 幾何セミナー, 大阪大学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 On the lower bound of the Calabi type functional
3. 学会等名 Seminaire dans Departement de Mathematiques d'Orsay (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 The optimal destabilizer of a Fano manifold
3. 学会等名 Seminaire de geometrie, CMLS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Optimal destabilizing degeneration and the geometric flow for a Fano manifold
3. 学会等名 Seminaire de Geometrie complexe, Toulouse (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 ファノ多様体の満洲ソリトンと相対D安定性
3. 学会等名 第66回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Optimal destabilizer of a Fano manifold
3. 学会等名 KIAS seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Optimal destabilizer of a Fano manifold
3. 学会等名 複素解析幾何セミナー, 東京大学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Optimal destabilizer of a Fano manifold
3. 学会等名 Workshop on stabilities in Kahler geometry and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 The reduced J-functional and application to the Yau-Tian-Donaldson type conjecture
3. 学会等名 The 24th Symposium on Complex Geometry, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 A variational aspect of the Kahler-Einstein problem
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Reduced norm of a test conguration and weak YTD conjecture
3. 学会等名 Symposium in Geometry and Differential Equations, Beijing, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Reduced norm of a test conguration and weak YTD conjecture
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables, Hayama, Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Stability of a polarized manifold and coercivity of the K-energy functional
3. 学会等名 Pacic Rim Complex- Symplectic Geometry Conference, Pohang, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 On the gradient ow of the Ding energy functional
3. 学会等名 Positivity Concepts on Holomorphic Line Bundles and Theories on Canonical Kahler Metrics, 大阪市立大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 On the weak Yau-Tian-Donaldson conjecture
3. 学会等名 KASS seminar, Chalmers University, Goteborg, Sweden (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 トリーク多様体の安定性とKエネルギーのcoercivity
3. 学会等名 第64 回幾何学シンポジウム, 金沢大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Gradient flow of the Ding functional
3. 学会等名 複素解析幾何セミナー, 東京大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 久本智之
2. 発表標題 Stability of a Fano manifold in terms of the Ding energy functional
3. 学会等名 Winter School on K-stability, Haeundae, Busan, Korea (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Tomoyuki Hisamoto  
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hisamoto/>  
Tomoyuki Hisamoto  
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hisamoto/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------