

令和 3 年 6 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14189

研究課題名(和文)漸近的対称空間の幾何解析と放物幾何の研究

研究課題名(英文)Geometric analysis on asymptotically symmetric spaces and parabolic geometries

研究代表者

松本 佳彦(Matsumoto, Yoshihiko)

大阪大学・理学研究科・助教

研究者番号：00710625

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：通常の空間(ユークリッド空間)とは異なる双曲空間という空間が19世紀以来知られているが、その一般化にあたる「漸近的対称空間」が近年研究されている。アインシュタイン方程式をみたすものを調べるのが中心的な課題である。本課題では、この分野に本質的進展をもたらすことを目的とする研究を行った。漸近的対称アインシュタイン空間のひとつのタイプについて、さらに豊富な幾何学的構造が空間に備わっていると考えるべきだと提案し、その例を系統的に構成する定理を証明した。また、それとは別のタイプの漸近的対称アインシュタイン空間を構成する新たな方法をつくり、それにより得られる空間たちの極限について考察を加えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本課題で実施した研究は純粋数学に属するもので、近い未来に実用的な意味で社会に役立つことはおそくない。しかし、人類の共有する知的地平を広げるという点において意義がある。ひいては、国際社会において日本が文化的に敬意をもたれることにも、多少の貢献があるかもしれない。学術的には、世界的にみて類例のない研究の方向性を示したものと信ずる。この方向性を発展させることができるか、引き続き取り組みを進めていきたい。また、物理学には何らかの形で影響をもたらす可能性があると期待される。

研究成果の概要(英文)：The hyperbolic space, a mathematical concept found in the nineteenth century that opened the door toward modern study of geometry, has been generalized in many ways, and there is a relatively recent generalization called asymptotically symmetric spaces. Of central interest are those spaces satisfying the Einstein equation. Our aim in this research project was to deliver substantial progress in this field. We proposed that asymptotically symmetric spaces of a certain type be furnished with an additional geometric structure (an almost complex structure satisfying some partial differential equation), and proved a theorem that systematically provides examples of such a furnishment. Moreover, we obtained a new construction of a family of asymptotically symmetric spaces of another type, and studied the interesting limiting behavior of the family.

研究分野：数学

キーワード：微分幾何学 リーマン幾何学 アインシュタイン方程式 漸近的対称空間

1. 研究開始当初の背景

「漸近的対称計量」というのは、非コンパクト多様体上に定義される、ある種の Riemann 計量たちの総称である。そのサブクラスとして、数学のみならず物理学でも扱われる「漸近的双曲計量 (以下, AH 計量) や、多変数複素関数論における有界強擬凸領域の幾何学的研究と関連をもつ「漸近的複素双曲計量 (以下, ACH 計量)」などがある。

各々の漸近的対称計量にはその「モデル」となる非コンパクト型対称空間 G/K があって、無限遠に近づくにつれて計量の振る舞いは G/K のそれに近づいていく。特定のモデル G/K を共有する漸近的対称計量のことを、同じタイプに属する漸近的対称計量とよぶことにしよう。たとえば、上記の「AH 計量」とか「ACH 計量」というのは、この意味でのタイプにつけられた名前である。AH 計量は G/K が実双曲空間の場合にあたり、ACH 計量というのは G/K が複素双曲空間の場合にあたる。

漸近的対称計量をもつ空間の幾何学的・解析学的研究は約 40 年前に遡る。AH 計量の研究が始められたのは、1980 年代、Fefferman-Graham [5] によってであった。ACH 計量の研究は、その特別な場合 (ACH Kähler 計量の場合) が、AH 計量に先行して 1970 年代に Fefferman [4] や Cheng-Yau [2] によって始められている。もっとも初期には、それらは統一的には捉えられておらず、個々のタイプの研究と、その類似に関する暗黙知があった、という状態だったのかもしれない。それらを「漸近的対称計量」として見通す視点は 2000 年になり Biquard [1] によって導入された (あるいは、1991 年の Epstein-Melrose-Mendoza [3] にもそういう視点があったというべきだろう)。このとき同時に、ACH Kähler 計量に限らない一般の ACH 計量の研究の重要性が認識された。

漸近的対称計量の研究において中心的課題とされているのは Einstein 方程式の研究である。漸近的対称計量をもつ空間には無限遠境界の概念があり、さらにこの無限遠境界は、それ自身、タイプに応じた特定の種類の幾何学的構造をもつ。課題となっているのは、無限遠境界の幾何構造と Einstein 方程式の解の対応の解明だ。この対応をバルク境界対応とかホログラフィーとかいったりする。ホログラフィーに関する最も単純な問題設定を述べるならば、それはたとえば、無限遠境界に (タイプに応じた特定の種類の種類に属する) どんな幾何構造を与えても、対応する Einstein 方程式の解は存在するのか、またそれは一通りしかないのか、ということになる。ちなみにこの問いの答えは「存在しないこともあるし、一通りではないこともある」であることがわかっている (とくに「非存在」のほうは、ごく最近になって Gursky-Han [6] が発見した現象である。本課題の研究開始当初はこの論文は未出版であった)。したがって、もっと繊細な形の問いがあらためて立てられなければならない。

漸近的対称計量に対する Einstein 方程式の研究には、さらに深化する大きな余地がある。

2. 研究の目的

本課題における研究の目的は、漸近的対称計量に対する Einstein 方程式に関連する幾何解析、およびそれを用いた無限遠境界に現れる幾何構造の不変量構成の研究に、新たな本質的進展をもたらすことである。

3. 研究の方法

上記の目的を達成するひとつの形として、具体的には次のような目標を設定した。第一に、漸近的対称計量を備えた空間における「付加的な幾何構造」の概念を提出し、またその付加的な幾何構造をもつような Einstein 方程式の解の構成法を確立すること。第二に、それを活用した境界不変量の構成を行うことである。

上記の目標設定は、古くから知られた ACH Einstein 計量の典型例である、Fefferman [4] と Cheng-Yau [2] の ACH Kähler-Einstein 計量の性質に基づいている。この場合、自然な「複素構造」とよばれる幾何構造が空間に備わっていて、これは ACH 計量に「Kähler 性」をもたせている。

このことを念頭におくと、一般の ACH Einstein 計量についても、「計量が Kähler 性に近い性質をもつような、一種の複素構造が存在する」ことが望ましいと考えられた。まず取り組んだのは、これらの観察に基づく、ACH 計量の場合における「一種の複素構造」を明確に定式化すること、存在証明、さらに境界不変量の構成であった。

さらに、AH 計量、ACH 計量につづく第 3 のタイプである AQH 計量（漸近的四元数双曲計量）の場合に、同様のことを行おうとした。

なお、本研究課題の研究期間中、2017 年 8 月 30 日から 2019 年 8 月 29 日までのあいだ、松本（研究代表者）は日本学術振興会特別研究員としてスタンフォード大学（アメリカ）に滞在した。受入研究者の R. Mazzeo 氏からの助言を得るとともに、スタンフォード大学を拠点として、主にアメリカの他大学を多数訪問し、関連研究者との議論を重ねながら研究を実施した。

4. 研究成果

(1) ACH Einstein 計量を備えた空間における「一種の複素構造」について

ACH Einstein 計量を備えた空間において、まず計量に整合的な概複素構造を考えることとし、その上で、さらにその概複素構造に課すべき微分方程式を提案した。

この微分方程式というのは、前項で述べた「計量が Kähler 性に近い」という性質を表すものだが、その要請だけでは候補となる微分方程式は無数にある。われわれが考察すべき方程式を選びとるために、次のような方法をとった。計量に整合的な概複素構造全体の集合を考え、この集合に適切な汎関数を導入する。そしてその汎関数に対する Euler-Lagrange 方程式を考える。汎関数を選ぶ際の指導原理は、Euler-Lagrange 方程式を ACH Kähler Einstein 構造において線型化したとき、得られる方程式が正則接束値微分形式に対する Dolbeault Laplace 方程式に一致することとした。

上述の指導原理は、松本（研究代表者）による過去の研究結果[9]に関係する。既知の解から変形によって新しい解を構成する問題を考えたい。そのとき、線型化方程式が上述のような Dolbeault Laplace 方程式になっていれば、ACH Kähler-Einstein 構造の変形が可能となる。こうして、ACH Einstein 空間におけるわれわれの Euler-Lagrange 方程式の解を系統的に構成することができた。

さらに、そのような解の漸近展開も決定した。これは境界の幾何学的構造（今の場合 ACH 計量を考えているので、CR 構造（コーシー・リーマン構造））によって記述されるもので、漸近展開を決定することは境界不変量の構成に向けた重要なステップである。

以上の内容については、まず問題提起をサーベイ論文[7]の中で行った。ついで上記の成果について、論文プレプリントを公表し[10]、論文誌への投稿を行った。

なお、境界不変量の具体的な構成も試みたが、研究期間内においては成功にはいたらなかった。

(2) ユニタリ不変な AH Einstein 空間の族の構成について

これは、ACH Einstein 計量に対する「一種の複素構造」の考察の中で得られた副産物である。

作業仮説を検証するためのテストケースとして用いることを意図して、「ACH Einstein 計量であって、とくに大きな対称性をもつものを構成する」という課題に取り組んだ。ここで AH Einstein 計量についても同じ問題を考えることにした。というのは、AH Einstein 計量についても試みられていないような構成手法もあるからである。いきなり ACH 計量の場合を考えるよりも、まず AH 計量を考えるほうが、手法を適用する上での困難がどこにあるのか把握する上で都合がよい。

複数の手法を試みたが、この中で、Page-Pope [11]による手法が AH Einstein 計量の構成についてはとくに有効であることがわかった。この手法によって偶数次元開球で定義されたユニタリ群の作用で不変な AH Einstein 計量の族を構成することができ、結果として Pedersen [12]がつくった 4 次元 AH Einstein 計量の族を高次元化するような例を与えることができた。さらにこうして得られる AH Einstein 計量の族の極限を考えると、タイプの「転移」が起こって複素双曲計量が現れたり、また崩壊が起こって一つ次元の低い特異点をもつ AH Einstein 空間が現れたりすることが観察された。

以上の内容を論文として発表した[8].

なお, ACH Einstein 空間についても同様の構成を行うための試みをしたが, 研究期間内においては達成できなかった.

〈引用文献〉

- [1] O. Biquard, Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques, *Astérisque* **265** (2000), vi+109 pp.
- [2] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 4, 507–544.
- [3] C. L. Epstein, R. B. Melrose, and G. A. Mendoza, Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains, *Acta Math.* **167** (1991), 1–106.
- [4] C. L. Fefferman, Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains, *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), no. 2, 395–416.
- [5] C. Fefferman and C. R. Graham, Conformal invariants, *The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984)*, Astérisque Numero Hors Serie, 1985, 95–116.
- [6] M. J. Gursky and Q. Han, Non-existence of Poincaré-Einstein manifolds with prescribed conformal infinity, *Geom. Funct. Anal.* **27** (2017), 863–879.
- [7] Einstein metrics on strictly pseudoconvex domains from the viewpoint of bulk-boundary correspondence, In: J. Byun, H. Cho, S. Kim, K.-H. Lee, J.-D. Park (eds.), *Geometric Complex Analysis*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics vol. 246, Springer, 2018.
- [8] Y. Matsumoto, A construction of Poincaré-Einstein metrics of cohomogeneity one on the ball, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), 3983–3993.
- [9] Y. Matsumoto, Deformation of Einstein metrics and L^2 cohomology on strictly pseudoconvex domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* **373** (2020), 5685–5705.
- [10] Y. Matsumoto, *Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds*, プレプリント.
<https://arxiv.org/abs/1812.09633> からアクセス可能.
- [11] D. N. Page and C. N. Pope, Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles, *Class. Quantum Grav.* **4** (1987), 213–225.
- [12] H. Pedersen, Einstein metrics, spinning top motions and monopoles, *Math. Ann.* **274** (1986), 35–59.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshihiko Matsumoto	4. 巻 147
2. 論文標題 A construction of Poincare-Einstein metrics of cohomogeneity one on the ball	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3983-3993
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14525	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshihiko Matsumoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Einstein metrics on strictly pseudoconvex domains from the viewpoint of bulk-boundary correspondence	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Geometric Complex Analysis	6. 最初と最後の頁 235-245
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-981-13-1672-2_18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 10件）

1. 発表者名 Yoshihiko Matsumoto
2. 発表標題 Deformation of Einstein metrics and almost complex structures on strictly pseudoconvex domains
3. 学会等名 Differential Geometry & Geometric Analysis Seminar（プリンストン大学）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Geometric analysis on asymptotically hyperbolic and complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会（幾何学分科会特別講演）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihiko Matsumoto
2. 発表標題 CR structures, ACH-Einstein fillings, and almost complex structures
3. 学会等名 The first Geometry Conference for Friendship of Japan and Germany (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds
3. 学会等名 複素解析幾何セミナー (東京大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds
3. 学会等名 幾何セミナー (大阪大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds
3. 学会等名 微分トポロジーセミナー (京都大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 CR structures, ACH-Einstein fillings, and almost complex structures
3. 学会等名 第25回複素幾何シンポジウム(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds
3. 学会等名 幾何学セミナー(名古屋大学)(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds
3. 学会等名 多変数関数論冬セミナー(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihiko Matsumoto
2. 発表標題 A construction of Poincare-Einstein metrics of cohomogeneity one on the ball
3. 学会等名 2020 Taipei-Hsinchu Conference on Geometric Invariance and Partial Differential Equations(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 CR structures, ACH-Einstein fillings, and almost complex structures
3. 学会等名 リーマン幾何と幾何解析 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshihiko Matsumoto
2. 発表標題 CR structures, ACH-Einstein fillings, and almost complex structures
3. 学会等名 韓国高等科学院セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 A construction of Poincare-Einstein metrics of cohomogeneity one on the ball
3. 学会等名 Analytical Problems in Conformal Geometry and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Deformation of Einstein metrics and L2 cohomology on strictly pseudoconvex domains
3. 学会等名 Differential Geometry/PDE Seminar (University of Washington) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Einstein asymptotically complex hyperbolic spaces and almost complex structures
3. 学会等名 2019 Taipei Conference on Geometric Invariance and Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 A construction of Poincaré-Einstein metrics of cohomogeneity one on the ball
3. 学会等名 Geometry Luncheon Seminar (Pennsylvania State University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds
3. 学会等名 Geometry Seminar (Stanford University) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 On $Sp(2)$ -invariant asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics on the 8-ball
3. 学会等名 東京大学・複素解析幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松本佳彦
2. 発表標題 On $Sp(2)$ -invariant asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics on the 8-ball
3. 学会等名 大阪大学・幾何セミナー
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

松本佳彦 http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~matsumoto/

6. 研究組織			
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
	Stanford University	Worcester Polytechnic Institute	Princeton University	他2機関
米国				
イタリア	Scuola Normale Superiore			
その他の国・地域(台湾)	Academia Sinica			