

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14193

研究課題名(和文) ケーラーでない開複素多様体の幾何と4次元トポロジー

研究課題名(英文) Geometry of non-Kaehler open complex manifolds and 4-dimensional topology

研究代表者

粕谷 直彦 (Kasuya, Naohiko)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：70757765

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では当初の目標であった「任意の3次元閉接触多様体は強擬凹複素曲面の境界として実現可能か？」という問いを肯定的に解決し、さらに接触多様体を充填する複素曲面はケーラーにも非ケーラーにもとれることを証明した。このことが主な研究成果である。また、任意の2つの3次元閉接触多様体を複素コボルディズムでつなげること、さらにそのコボルディズムはケーラーにとれることを証明した。ただし、そのケーラー構造は境界とは相性が悪く、ケーラーコボルディズムの構造は与えない。この内容は現在、Daniele Zuddas氏との共著論文として学術雑誌に投稿中である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

強擬凸複素曲面は複素幾何・接触トポロジーの両面から盛んに研究されており、その境界の接触構造には「Stein filliable, 特にtightである」という強い制約がかかることが知られている。本研究課題では当初の目標であった「任意の3次元閉接触多様体は強擬凹複素曲面の境界として実現可能か？」という問いを肯定的に解決し、さらに接触多様体を充填する複素曲面はケーラーにも非ケーラーにもとれることを証明した。この成果は、強擬凹曲面は強擬凸の場合と異なり、境界接触構造に関して柔軟性を持っていることを示しており、複素曲面および接触構造の研究における「強擬凹」という新たな方向の重要性を示唆している。

研究成果の概要(英文)：In this research program, I gave an affirmative answer to the problem "Is any closed co-oriented contact 3-manifold realizable as the boundary of a strongly pseudoconcave surface?" Moreover, I proved that a complex surface concavely filling the contact structure can be made Kaehler or non-Kaehler which ever you want. This is the main result that I obtained. Moreover, I showed that any two closed contact 3-manifolds can be connected by a complex cobordism, and such a cobordism can be taken to be Kaehler. In this case, however, the Kaehler structure is not compatible with the boundary contact structure, so the cobordism is not a Kaehler cobordism, in general. These results were summarized in a research paper written with Daniele Zuddas, which has been submitted a journal and under review now.

研究分野：微分位相幾何学

キーワード：複素曲面 接触構造 トポロジー

1. 研究開始当初の背景

本研究課題代表者の粕谷は当初すでに、Antonio J Di Scala, Daniele Zuddas 両氏とともに、4次元ユークリッド空間上のケーラーでない複素構造の初めての例を非可算無限個構成し、さらにその応用として、任意の向き付け可能 4次元開多様体上には非可算無限個のケーラーでない複素構造が存在することを示していた。その例の構成法のアイディアは、4次元トポロジー特有のあるトラスファイブレーションの例と楕円曲面の特異ファイバーの近傍の複素解析的モデルを融合させるというものであり、その融合の仕方はそれまで誰も考えつかない斬新なものであった。一方、そのように構成された例は適切に境界を整形すれば、4次元球体と微分同相な強擬凹複素曲面にできて、境界には3次元球面上の *overtwisted* な接触構造が現れるということが、Daniele Zuddas 氏との共同研究において明らかとなった。これは強擬凸複素曲面に現れる接触構造は必ず Stein fillable となる、という事実と対照的で、非常に興味深い例となっていた。

2. 研究の目的

1. で述べた通り代表者らの研究により、境界に *overtwisted* な接触構造が現れる 4次元球体に微分同相なケーラーでない強擬凹曲面の存在がすでに分かっていた。これは、強擬凸曲面の場合に境界の接触構造に強い制約がかかるのとは対照的である。そこでまず、どのような接触構造が強擬凹複素曲面の境界として現れ得るのか、ということが気になってくる。さらに、上記の例は *overtwisted* な接触構造および非ケーラー性、という強擬凸の場合には決して現れない性質が同居している。そこでこれらがたまたま同居しているだけなのか、それらの間に関連性があるのか、ということも重要な疑問点となる。つまり、自然な問いとして以下の2つが挙げられる。

- (1) 任意の3次元閉接触多様体は強擬凹曲面の境界として実現可能か？
 - (2) 強擬凹曲面の境界に現れる接触構造の *tightness*, *overtwistedness* は複素曲面のケーラー性・非ケーラー性とどのような関係があるのか？
- これら2つの問いに答えることが本研究課題の目的であった。

3. 研究の方法

Eliashberg による Stein 曲面のハンドル体構成を参考にし、これを強擬凹境界へのハンドル接着に作り替えることにより、接触デー手術の結果を強擬凹境界への正則 2-ハンドル分解で実現することを可能にした。即ち、強擬凹正則 2-ハンドル接着の方法を確立したことが我々の仕事の本質であり、課題へのアプローチ方法である。Eliashberg の方法との違いを詳しく述べると以下の通りである。Eliashberg の方法は複素曲面の強擬凸境界上の Legendrian knot に沿って Lagrangian disk を core とする正則ハンドルを接着するものである。一方、我々の方法は、複素曲面の強擬凹境界上の transverse knot に沿って holomorphic disk を core に持つ正則ハンドルを接着するというものである。

4. 研究成果

- (1) 第1の問いに対して「任意の3次元閉接触多様体は強擬凹曲面の境界として実現可能」という解答を与えた。我々が強擬凹正則 2-ハンドル接着の方法を確立したことの結果として、境界接触構造に対する接触デー手術のうち *contact (-1)-surgery* だけでなく *contact (+1)-surgery* も正則ハンドル接着で実現可能となった、ということが重要なポイントである。これによって、スタートになる何らかの強擬凹曲面を用意すれば、そこに正則ハンドル接着を繰り返していくことで、境界に現れる接触構造とにかえることができるようになった。ここで、接触デー手術に関する Ding-Geiges の結果を適用すれば、任意の3次元閉接触多様体が強擬凹曲面の境界として実現できることが証明できる。この研究成果は、トポロジーおよび多変数複素解析の分野の研究者から高い評価を受けている。実際、2021年秋の数学会トポロジー分科会特別講演や複数の多変数複素解析の研究集会でこの内容を講演する機会に恵まれた。また、1995年の Lempert の論文では「強擬凸3次元 CR 多様体には、必ずそれを裏から充填する強擬凹複素曲面が存在する。しかし、その存在を言うために強擬凸という仮定は本当に必要なのか？」という問いが示唆されている。我々の結果は、この問いに接触構造のレベルで答えたもの、と捉えることができる。
- (2) 第2の問いに対して「強擬凹曲面の境界に現れる接触構造の *tightness*, *overtwistedness* は複素曲面のケーラー性・非ケーラー性には関係性はない」という解答を与えた。これは(1)の結果をより精密に見ることで証明できた。要するに、どんな3次元閉接触多様体に対しても、それを境界に持つ強擬凹複素曲面をケーラーに作ることも、非ケーラーに作る

こともできる、ということである。なぜなら、スタートをケーラーに取ったうえで途中の接着ハンドルを十分細くとれば出来上がりもケーラーであることが証明できる一方、スタートを非ケーラーに取れば出来上がりも自動的に非ケーラーになるからである。非ケーラーな強擬凹複素曲面の例はDi Scala-K-ZuddasおよびK-Zuddasによって既に与えてあるから、それをスタートに使えばよい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Naohiko Kasuya, Atsuhide Mori	4. 巻 23
2. 論文標題 On the deformation of the exceptional unimodal singularities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5427/jsing.2021.23a	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Naohiko Kasuya	4. 巻 148
2. 論文標題 CR regular embeddings of S^{4n-1} in \mathbb{C}^{2n+1}	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3021-3024
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14962	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Antonio Di Scala, Naohiko Kasuya, Daniele Zuddas	4. 巻 16(3)
2. 論文標題 Non-Kähler complex structures on R^4 , II	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Symplectic Geometry	6. 最初と最後の頁 631-644
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/JSG.2018.v16.n3.a2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 7件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 強擬凹複素曲面の境界に現れる接触構造
3. 学会等名 東大複素解析幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 強擬凹複素曲面の境界に現れる接触構造
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季分科会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 強擬凹曲面の境界に現れる接触構造
3. 学会等名 多変数関数論冬セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 強擬凹複素曲面の境界に現れる接触構造
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 強擬凹複素曲面の境界に現れる接触構造
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 強擬凹複素曲面の境界に現れる接触構造
3. 学会等名 東大複素解析幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 Knots and links of complex tangents
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naohiko Kasuya
2. 発表標題 Non-Kähler complex structures on \mathbb{R}^4
3. 学会等名 Topology of pseudoconvex domains and analysis of reproducing kernels（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------