

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14196

研究課題名(和文) 群作用を持つ多様体の組合せ的不変量の構成

研究課題名(英文) Combinatorial constructions of invariants of manifolds with group actions

研究代表者

黒木 慎太郎 (Kuroki, Shintaro)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：90433309

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：2017年度から2021年度まで、群作用を持つ多様体を主にグラフの観点から研究を行った。本研究期間は、主に韓国の研究グループとflag Bott多様体と呼ばれるflag多様体のバンドルが連続する対象に関して、その同変コホモロジー環の計算と、GKMグラフの計算を行った。また、GKMグラフの計算を行った論文においては、トーラス作用が非コンパクトなトーラス作用へ拡張したときの軌道の閉包がどのような多様体になるかという問題についても考察した。この研究は最近になって波及し始めている。また、トーラスオービフォールドの同変コホモロジーに関する研究も行いカナダの出版社に論文が受理された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

群の作用を持つ多様体は、対称性の高い空間として非常にきれいな性質を持つ場合が多い。近年では、そのような多様体と他分野(特に組み合わせ論)との関係が見つかり、研究が盛んになっている。組み合わせ論という素朴な分野との結びつきが現れたので今後社会の役に立つ研究につながる可能性が期待される。本研究では、そのような対象の最も基本的な不変量である同変コホモロジーに関する研究を行い、flag Bott多様体とトーラスオービフォールドの同変コホモロジーを決定した。トーラスオービフォールドに関しては、 $GL(n, R)$ の表現とも関係があることが分かった。これは研究当初は想像もしていなかった結果である。

研究成果の概要(英文)：From 2017 to 2021, we studied manifolds with group actions mainly from the viewpoint of graphs. During this period, we mainly worked with a research group in Korea on flag Bott manifolds which are defined by iterated bundles of flag manifolds. We computed their equivariant cohomology rings and GKM graphs. We also considered the question of the topology of the orbit closure for the extended noncompact torus actions on flag Bott manifolds. This research has recently begun to study by the other researchers. We also studied the equivariant cohomology of torus orbifolds and published it in a journal.

研究分野：トーリックトポロジー

キーワード：同変コホモロジー GKM理論 変換群論 トーラス作用 オービフォールド flag 多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究事業の代表者は、GKM 多様体と呼ばれるトーラスの作用をもちその 1 次元と 0 次元の軌道がグラフの構造を持つ対象について研究してきた。GKM 多様体から得られるグラフを GKM グラフと言い、近年ではそのグラフを用いて同変コホモロジー環を研究する研究が国内外で盛んにおこなわれている。

その中でも代表者は特に本研究開始当初まで以下の二つの研究を行ってきた。

- (1) GKM グラフがトーラスグラフと呼ばれるトーラス多様体から定義される GKM グラフの時に、トーラスグラフのルート系と呼ばれる概念を柘田幹也氏とともに定義し、トーラス多様体上のトーラス作用がそのトーラスを極大トーラスとして含むコンパクトリー群の作用へ拡張するための条件を見つかることができた。
- (2) GKM グラフがより大きなトーラス作用から来る GKM グラフへ拡張するために Group of axial functions という概念を定義した。Group of axial functions はアーベル群になるのだが、その階数が GKM 多様体へ作用するトーラスの次元の上からの評価を与えることが分かった。

2. 研究の目的

本研究事業の大きな目的は、研究開始当初の背景で見つけた不変量のより深い理解を目指すことである。より具体的には上で述べた二つの研究に対して以下の目標を達成することを目指す。

- (1) トーラスグラフのルート系を一般の GKM グラフへの拡張を目指す。
- (2) Group of axial functions のより深い理解を目指し、その計算の簡略化と応用を探す。

3. 研究の方法

研究開始当初はほとんど手掛かりのない状態だったので、上記の研究を目的を達成するために外堀を埋めることを目指した。その中から目的を達成するための手掛かりを探すという方法をとった。より具体的には(1), (2)の両方に対して、今までに計算されてこなかった GKM 多様体のクラスに対して、GKM グラフを計算したり、その同変コホモロジー環を計算するという行を行った。特に本研究期間中は GKM グラフの概念自体を拡張することが中心になった。

4. 研究成果

- (1) Group of axial functions の応用の一つとして、韓国の研究グループと定義した flag Bott 多様体上の自然なトーラス作用が拡張不可能であることを示した。これは、(査読はないが)数理研の講究録として発表した。また、Group of axial functions に関する論文が研究期間中に査読付きの雑誌に掲載された。
- (2) また Group of axial functions をより理解するために、修士の学生とともに Gale dual という概念を定義して、complexity one GKM graph の場合にそれを研究した。出た結果は岡理大の紀要(査読無し)に掲載された。現在はこの結果を推し進めて ICU の松村朝雄氏と共より一般的な結果を出した論文を執筆中である。
- (3) トーラスグラフのルート系のより詳しい研究のために、トーラス多様体を擬トーリックに制限した場合にルート系はどのように現れて、グラフや多面体の組み合わせ構造にどのような制限を付けるかということの研究した。研究では J-construction と呼ばれる組み合わせ論的な構成方法とトーラス多様体上の拡張作用には関係があることが分かった。この関係は当初予想できなかったので新しい結果と言える。現在この研究についてはより強い結果を出して論文を執筆中で、次の研究期間中に査読付きの雑誌に論文を発表する予定でいる。
- (4) 韓国の研究グループ (E.Lee, J.Song, S.Suh) とともに、flag Bott 多様体と呼ばれる、flag 多様体のバンドルのタワーを定義し、それについて研究した。この論文では、flag Bott 多様体の GKM グラフを計算し、その同変コホモロジー環も計算し、拡張された Bott 多様体から得られた flag Bott 多様体上の軌道閉包に関して研究を行った。また、では九州大の鍛冶静雄氏の力も借りて、一般のリー型の flag Bott 多様体というものを定義して、Borel の方法で同変コホモロジー環を計算し、明示的な公式を得ることができた。注意点として、一般のリー型が持つトーラスの作用は効果的とは限らないので、A 型に関しては得た同変コホモロジー環(効果的なトーラス作用の場合)とは違うものになっている。数理研の講究録に掲載したでは C 型の場合について Borel-Hirzebruch の方法(効果的なトーラス作用の整数係数の同変コホモロジー環を得ることができる公式)で計算した公式も得ている。
- (5) A. Darby, J. Song 氏達とともにトーラスオービフォールドの研究も行った。その研究の中でオービフォールドの場合に正しいと思われる GKM グラフを定義し、その同変コホモロジー環の GKM 表記の仕方も証明した。では同変形式的なトーラスオービフォール

ドの場合に同変コホモロジー環を計算し環構造を得ることができた。特にトーラス多様体と違い、その生成元を導くということが新たな問題として提出することができた。では 4 次元のトーラスオービフォールドの生成元を求めるためには $GL(n, R)$ の表現が必要になることが分かった。の研究の過程で不動点が 2 点のトーラスオービフォールドが面白い特徴を持っていることが分かったので、これも査読付きの論文として発表した。

引用文献

- S. Kuroki: Flag Bott manifolds and their maximal torus actions, 数理解析研究所講究録 2016, 154--160 (2017).
- S. Kuroki: Quasitoric manifolds, root systems and J-constructions of polytopes, 数理解析研究所講究録 2060, 77--81 (2018).
- S. Kuroki: On equivariant cohomology rings of flag Bott towers, 数理解析研究所講究録 2135, 95--107 (2019).
- S. Kuroki: Upper bounds for the dimension of tori acting on GKM manifolds, J of MSJ, 71(2), 483--513 (2019).
- A. Darby, S. Kuroki, J. Song: Torus orbifolds with two fixed points, Algebraic Topology and Related Topics, Trends in Mathematics, 67--85 (2019).
- S. Kuroki, R. Yukito: Gale dual of the GKM graph with a complexity one axial functions, The Bulletin of Okayama U of Science, 55-A, 1--10 (2019).
- S. Kaji, S. Kuroki, E. Lee, D. Suh: Flag Bott manifolds of general Lie types and their equivariant cohomology rings, Homotopy Homology, Appl, 22(1), 375--390 (2020).
- S. Kuroki, E. Lee, J. Song, D. Suh: Flag Bott manifolds and the toric closure of general orbit associated to a generalized Bott manifold, Pacific J. of Math, 308(2), 347--392 (2020).
- A. Darby, S. Kuroki, J. Song: Equivariant cohomology of torus orbifolds, Canadian J of Math, 74(2), 299--328 (2022).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kuroki Shintaro, Lee Eunjeong, Song Jongbaek, Suh Dong Youp	4. 巻 308
2. 論文標題 Flag Bott manifolds and the toric closure of a generic orbit associated to a generalized Bott manifold	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 347 ~ 392
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2020.308.347	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shintaro Kuroki	4. 巻 2016
2. 論文標題 Flagified Bott manifolds and their maximal torus actions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 154 ~ 160
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Darby Alastair, Kuroki Shintaro, Song Jongbaek	4. 巻 74
2. 論文標題 Equivariant cohomology of torus orbifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 299 ~ 328
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008414X20000760	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shintaro Kuroki	4. 巻 2199
2. 論文標題 Vector bundle over a GKM graph and combinatorial Borel-Hirzebruch formula and Leray-Hirsh theorem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 42 ~ 52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shizuo Kaji, Shintaro Kuroki, Eunjeong Lee and DongYoup Suh	4. 巻 22-1
2. 論文標題 Flag Bott manifolds of general Lie type and their equivariant cohomology rings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 375, 390
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2020.v22.n1.a21	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shintaro Kuroki and Ryoto Yukitou	4. 巻 55
2. 論文標題 Gale dual of the GKM graph with a complexity one axial function	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 岡山理科大学紀要. A, 自然科学	6. 最初と最後の頁 1, 10
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shintaro Kuroki	4. 巻 2135
2. 論文標題 On equivariant cohomology rings of flag Bott towers	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 95, 107
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Alastair Darby, Shintaro Kuroki and Jongbaek Song	4. 巻 1
2. 論文標題 Torus orbifolds with two fixed points	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Topology and Related Topics, Trends in Mathematics	6. 最初と最後の頁 67, 85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-13-5742-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shintaro Kuroki	4. 巻 71-2
2. 論文標題 Upper bounds for the dimension of tori acting on GKM manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 483, 513
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shintaro Kuroki	4. 巻 2060
2. 論文標題 Quasitoric manifolds, root systems and J-constructions of polytopes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 77, 81
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件 (うち招待講演 17件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Gale dual of GKM graph
3. 学会等名 Workshop on Torus Actions in Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Gale dual of a GKM graph and its application to the extension problem of torus actions
3. 学会等名 International conference Topology and geometry of group actions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Equivariant vector bundle over a GKM graph and its projectivization
3. 学会等名 kpa70+ Transformation group theory --The path we have walked along, and the way to progress-- On the celebration for the retirement and the 70th birthday of Professor Krzysztof M. Pawalowski (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 黒木慎太郎
2. 発表標題 On equivariant cohomology rings of flag Bott towers
3. 学会等名 変換群論とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Flag Bott manifolds of general Lie type and their equivariant cohomology rings
3. 学会等名 Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin - 100 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Gale dual of a GKM graph and its basic property
3. 学会等名 Japanese-Russian Seminar on Toric Topology and Homotopy Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Gale dual of the GKM graph and its applications to the extension of the torus action on a GKM manifold
3. 学会等名 The 46th Symposium on Transformation Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Equivariant cohomology of torus orbifolds with vanishing odd degree cohomology
3. 学会等名 Glances at Manifolds 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Equivariant cohomology of torus orbifolds
3. 学会等名 第45回変換群論シンポジウム(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 黒木慎太郎
2. 発表標題 ヒルベルト第三問題について
3. 学会等名 Workshop on Geometric Discrete Mathematical Science III (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 黒木慎太郎
2. 発表標題 Equivariant cohomology of torus orbifolds
3. 学会等名 代数トポロジーセミナー（京都大学）（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 黒木慎太郎
2. 発表標題 Quasitoric manifolds, root systems and J-constructions of polytopes
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）変換群を核とする代数的位相幾何学（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Extended actions of quasitoric manifolds and J-constructions of polytopes
3. 学会等名 The Princeton-Rider Workshop on the Homotopy Theory of Polyhedral Products（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 On flagged Bott manifolds
3. 学会等名 Young Researchers in Homotopy Theory and Toric Topology（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 黒木慎太郎
2. 発表標題 GKM manifold and GKM graph (1), (2)
3. 学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 黒木慎太郎
2. 発表標題 Flag Bott manifolds and the toric closure of generic orbit associated to a generalized Bott manifold
3. 学会等名 第44回変換群論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Equivariant cohomology of a certain class of torus orbifolds
3. 学会等名 7th East Asian Conference on Algebraic Topology (EACAT7) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shintaro Kuroki
2. 発表標題 Complexity one GKM manifolds with extended actions
3. 学会等名 Toric Topology 2017 in Osaka (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 黒木慎太郎
2. 発表標題 Equivariant vector bundles from a GKM theoretical point of view
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）変換群論の新展開（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Shintaro KUROKI's HOME PAGE https://www.xmath.ous.ac.jp/~kuroki/index.html</p> <p>Toric Topology 2021 in Osaka https://www.xmath.ous.ac.jp/~kuroki/Toric2021.html</p> <p>kpa70+ Transformation group theory https://www.rs.tus.ac.jp/math2/math2/tsatoh/tsatoh-homepage/kpa70+_2_2021.html</p> <p>Toric Topology 2019 in Okayama https://sites.google.com/view/torictopology2019okayama/enhome?authuser=0</p> <p>Workshop for Young Researchers https://sites.google.com/view/torictopology2019okayama/enhome/workshop-for-young-researchers-english?authuser=0</p>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Toric Topology 2021 in Osaka	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 kpa70+ Transformation group theory --The path we have walked along, and the way to progress-- On the celebration for the retirement and the 70th birthday of Professor Krzysztof M. Pawalowski	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Toric Topology 2019 in Okayama	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Workshop for Young Researchers	開催年 2019年～2019年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------