

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：35403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14197

研究課題名(和文) 特異点をもつ曲面の微分幾何構造の離散化

研究課題名(英文) Discretization of differential geometric structures of surfaces with singularities

研究代表者

直川 耕祐 (Naokawa, Kosuke)

広島工業大学・情報学部・准教授

研究者番号：60740826

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目的は、特異点をもつ滑らかな曲面の微分幾何的性質を明らかにするとともに、その離散的対応物を定式化し性質を研究することにある。具体的には以下の研究について成果を得た。

(I)(1) 任意に与えられた結び目の型と捻り数をもつ、離散可展的かつ測地的なメビウスの帯の構成、(2) 離散可展面上に現れるカスプ辺型および燕の尾型の特異点の定式化と性質の研究、(II)(1) Kossowski計量の実現問題、(2) カスプ辺の異性体の研究と折り紙の曲線折りに関する研究、(3) 交叉帽子特異点の形式的べき級数による等長実現。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、曲線や曲面の微分幾何学的な性質に着目し、その離散的対応物を定式化し研究する分野である「離散微分幾何学」の研究が盛んになりつつある。微分幾何学的に重要と考えられる性質に着目して離散化しているため、数値計算における単なる近似に比べ幾何構造を保つと考えられ、数学の枠を超えて建築やコンピュータグラフィックスを含む工学的、芸術的分野への応用も期待される。本研究では、可展面と特異点についての離散化を出発点として、離散曲面の研究と、その由来となる特異点をもつ曲面の微分幾何学的性質の研究の両面に対して、広く成果を得た。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research project is to clarify the differential geometrical properties of smooth surfaces with singularities, and to formulate and study the properties of their discrete objects. In particular, the following results are obtained;

(I)(1) constructions of discrete developable and geodesic Mobius strips with arbitrarily given knot types and twisting numbers, (2) the formulation and study of properties of singularities of cuspidal edge type and swallowtail type, appearing on discrete developable surfaces, (II)(1) the problem of isometric realizations of a given Kossowski metric, (2) classifications of isomers of cuspidal edges up to congruence, and research on origami curved foldings, and (3) isometric realizations of cross cap singularities by formal power series.

研究分野：微分幾何学

キーワード：可展面 離散曲面 メビウスの帯 特異点 カスプ辺 交叉帽子 等長実現 折り紙

## 1. 研究開始当初の背景

近年、曲線や曲面の微分幾何学的な性質に着目し、その離散的対応物を定式化し研究する分野である「離散微分幾何学」の研究が盛んになりつつある。微分幾何学的に重要と考えられる性質に着目して離散化しているため、数値計算における単なる近似に比べ幾何構造を保つと考えられ、数学の枠を超えて建築やコンピュータグラフィックスを含む工学的、芸術的分野への応用も期待される。

研究開始当初は、3次元ユークリッド空間における、ガウス曲率が恒等的に零の線織面である「可展面」に着目した。可展面は、平面、円錐面や円柱面などのように、伸び縮みすることのない素材としての「紙」を丸めたり、滑らかに継ぎ合わせたりしてできる曲面の数学的モデルである。すなわち、局所的には標準形量を備えた2次元ユークリッド平面に等長的な曲面のことである。この微分幾何学的な性質に着目した離散的対応物として、1970年に Sauer によって定式化された「離散可展面」がある。筆者はこれまでに、滑らかな曲面のクラスにおける可展的なメビウスの帯の研究や、その上に現れるカスプ辺や燕の尾といった特異点の研究を行ってきた。滑らかな曲面やその特異点の微分幾何学的性質を明らかにするにつれ、その離散的対応物の定式化や性質に興味をもつに至った。

## 2. 研究の目的

曲面を微分幾何学的な意味で適切に離散化するためには、その由来となる滑らかな曲面の性質を明らかにすることが重要である。そのため、

- (I) 離散曲面の研究
  - (II) 特異点をもつ曲面の微分幾何学的性質の研究
- の両面の研究が必要である。これらについて研究し、性質を明らかにすることを目的とする。

## 3. 研究の方法

### (I) 離散曲面の研究

#### (1) 離散可展的なメビウスの帯の位相的性質

Sauer による「離散可展面」の定式化は原典がドイツ語で書かれており、この理論に詳しいウィーン工科大学のクリスティアン・ミュラー氏の協力を得て研究を行う。滑らかな場合においては、筆者がすでに、任意に与えられた結び目に沿う、指定された捻り数をもつ可展的なメビウスの帯の存在・非存在の問題を解決している。この知見をもとに、「任意に与えられた結び目の型と捻り数をもつ測地的なメビウスの帯の存在」を与えた黒野-梅原の定理の離散版の研究を行う。

#### (2) 離散可展面上の特異点

3次元ユークリッド空間における離散可展面は、直線の離散的な運動（すなわち、直線の番号づけられた列）であって、どの隣接する番号の2直線も同一平面上に横たわるものをいう。したがって、隣接する番号の2直線が互いに平行でなければ、交点をもつ。この意味で「特異点」が自然に定義される。滑らかな曲面に現れる特異点の場合と比較し、類似の性質が成り立たないかを調べる。

#### (3) 滑らかな曲面への応用

離散可展的なメビウスの帯の成果を、逆に滑らかな曲面の性質の解明へ応用できないかを調べる。

### (II) 特異点をもつ曲面の微分幾何学的性質の研究

#### (1) Kossowski 計量の実現問題

本田淳史氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏と共同で、非退化な特異点をもつフロントル曲面の内的定式化である「Kossowski 計量」を備えた2次元多様体の3次元ユークリッド空間への等長実現について調べる。

## (2) カスプ辺の異性体

(1)の3人と佐治健太郎氏と共同で、カスプ辺の異性体、すなわち、特異曲線を共有し、同じ第一基本形式をもつものの、互いに異なるカスプ辺について調べる。

## (3) 交叉帽子の等長実現

交叉帽子は2次元多様体から3次元ユークリッド空間への滑らかな写像において、そのクラスにおけるある種の位相の下で、ジェネリックに現れる特異点として知られている。上記4人および長谷川大氏、筆者の先行研究により、交叉帽子特異点の内的定式化である「Whitney 計量」が定義された。そこで、Whitney 計量の3次元ユークリッド空間への等長実現についての研究を遂行する。

## 4. 研究成果

(I)-(1) ミュラー氏と共同で、中心線が閉測地線となっている可展的なメビウスの帯の離散的定式化を行ったうえで、離散版の黒野-梅原型の定理を得た。中心線が閉曲率線となっている場合については、2種類の異なる離散化の手続きがあり、両方について成果を得ている。しかし、与えられた離散的な結び目に沿う離散可展的なメビウスの帯の捻り数の問題については、今のところ部分的な成果にとどまっている。具体的には、もし与えられた離散的な結び目がある平面内に横たわるならば、その離散的な結び目を生成曲線とする離散可展的なメビウスの帯が存在しないことは示したものの、どのような捻り数の離散的な帯が存在するかは今後の課題である。

(I)-(2) 離散可展面上に現れる特異点について、カスプ辺型の特異点と燕の尾型の特異点の定式化を行い、その判定法を与えた。滑らかな場合には、國分-Rossman-佐治-梅原-山田による波面上に現れるカスプ辺と燕の尾の判定法が知られているが、その離散的対応物に相当すると考えられる。今後、ミュラー氏と共同で論文にまとめていく予定である。

(I)-(3) 離散版の成果をもとに、無限回連続微分可能な曲面のクラスにおける黒野-梅原の定理の別証明を与えられるかを研究したが、まだ研究途上であり今後の課題である。

(II)-(1) 実解析的に滑らかな場合において、Cauchy-Kowalevski の定理を用いて、Kossowski 計量の実現定理を得た。Kossowski 氏はカスプ辺や燕の尾を含む波面のクラスに対して等長実現定理を示したが、筆者らはそれをカスプ状交叉帽子を含むフロントル曲面のクラスに拡張・精密化した。極限法曲率が零でない等長実現に対して、カスプ辺・燕の尾・カスプ状交叉帽子の判定法を与えた。

(II)-(2) 筆者を含む梅原氏、山田氏との先行研究で、カスプ辺の異性体が2個存在するという結果を得ていたが、本研究では、空間曲線が閉じていないときに、さらに2個、合計で異性体が一般に4個存在することが分かった。与えられた空間曲線が閉じている場合については、一般に異性体の1パラメータ族が4つ存在することも示した。

また、本研究の予想外の発展として、折り紙の曲線折りの研究成果を得た。カスプ辺と曲線折りは全く異なる対象であるにも関わらず、類似の結果が成り立つことを示した。紙の上に与えられた曲線に沿って折り目をつけて、空間内に与えられた曲線に沿わせて紙の曲線折りを作ると、同じ折り目から一般に2通りの折り方が出来ることは、古典的によく知られている。本研究では、さらに新しく2通り、古典的なものと併せると一般に合計4通りの折り方が分かった。また、一般には4通りであるが、折り目の曲線や空間曲線がある種の対称性をもつ場合には、曲線折りの合同類の個数が2個あるいは1個になることも示した。

(II)-(3) 共同研究で、交叉帽子特異点の等長実現については、形式的べき級数の形で解を得ることができた。その応用として、ある種の標準形の下でマクローリン展開したときに現れる係数が交叉帽子の幾何学的不変量を与えることを示し、応用として交叉帽子の幾何学的対称性をその不変量により特徴づけた。実際の実現については、今後の課題である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada	4. 巻 25
2. 論文標題 A generalization of Zakalyukin's lemma, and symmetries of surface singularities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 299--324
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2022.25m	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada	4. 巻 75
2. 論文標題 Symmetries of cross caps	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 131--141
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj.20211203	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada	4. 巻 63
2. 論文標題 On the existence of four or more curved foldings with common creases and crease patterns	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Beitraege zur Algebra und Geometrie	6. 最初と最後の頁 723--761
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13366-021-00602-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara, K. Yamada	4. 巻 50
2. 論文標題 Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 269--312
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/hmj/1607396490	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada	4. 巻 22
2. 論文標題 Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 59--91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.22e	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada	4. 巻 29
2. 論文標題 Cuspidal edges with the same first fundamental forms along a knot	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2050047, 16pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216520500479	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada	4. 巻 121
2. 論文標題 Curved foldings with common creases and crease patterns	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 102083, 10pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aam.2020.102083	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 HONDA Atsufumi, NAOKAWA Kosuke, UMEHARA Masaaki, YAMADA Kotaro	4. 巻 48
2. 論文標題 Isometric realization of cross caps as formal power series and its applications	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1~44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1550480642	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 14件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 直川耕祐
2. 発表標題 離散可展面とその特異点について
3. 学会等名 RIMS研究集会「部分多様体と群作用の幾何学」（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 直川耕祐
2. 発表標題 可展面に現れるカस्प边・燕の尾特異点の離散化
3. 学会等名 HIT-Math 2024 ミニワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 直川耕祐
2. 発表標題 折り紙の曲線折りについて
3. 学会等名 第1回マス・フォア・イノベーションセミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kosuke Naokawa
2. 発表標題 Discrete developable surfaces and their singularities
3. 学会等名 Discrete Geometric Analysis and its Applications（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 直川耕祐
2. 発表標題 可展面の離散化とその特異点について
3. 学会等名 Workshop on Submanifold theory in a wider sense (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 直川耕祐
2. 発表標題 可展面の離散化とそのトポロジーおよび特異点について
3. 学会等名 広島幾何学研究集会 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kosuke Naokawa
2. 発表標題 Topologies and singularities of discrete developable surfaces
3. 学会等名 Workshop and School on Geometric Analysis and Discrete Geometry, KIAS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kosuke Naokawa
2. 発表標題 Curved foldings with given creases and crease patterns
3. 学会等名 Geometric shape generation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kosuke Naokawa
2. 発表標題 On discrete developable Mobius strips
3. 学会等名 九州大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kosuke Naokawa
2. 発表標題 Developable Mobius strips and their discretization II
3. 学会等名 Mini-Workshop on Geometry and Mathematical Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kosuke Naokawa
2. 発表標題 Developable Mobius strips and their discretization I
3. 学会等名 Mini-Workshop on Geometry and Mathematical Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Naokawa
2. 発表標題 Isometric deformations and realizations of surfaces with non-degenerate singularities
3. 学会等名 International workshop on differential geometric aspects of integrable systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 直川耕祐
2. 発表標題 波面の等長変形と実現問題について
3. 学会等名 第64回幾何学シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Naokawa
2. 発表標題 Isometric deformations and realizations of surfaces with wave fronts
3. 学会等名 The third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者データ  <a href="http://www.it-hiroshima.ac.jp/faculty/information/computer/teacher/kosuke_naokawa/">http://www.it-hiroshima.ac.jp/faculty/information/computer/teacher/kosuke_naokawa/</a></p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

<p>国際研究集会 Workshop on Surface Theory --UY60--</p>	<p>開催年 2022年～2022年</p>
---	----------------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストリア	TU-Wien			