

令和 3 年 6 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14204

研究課題名（和文）確率微分方程式論の他理論との融合

研究課題名（英文）Combination of stochastic differential equations and other theories

研究代表者

楠岡 誠一郎 (Kusuoka, Seiichiro)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：20646814

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,895,320 円

研究成果の概要（和文）：この研究では確率解析の手法と他の理論で現れる手法を組み合わせることによって、これらの両方の理論の発展を試みた。中でも特に、確率微分方程式の手法を非線形偏微分方程式に応用することにより、量子力学における構成的場の理論で現れるような特異な確率偏微分方程式に対して、その解に当たる確率過程と定常分布の構成に成功した。これは量子場の新しい構成法を発見したことになり、確率解析だけでなく量子力学においても意義のある成果となっている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究における成果は特異確率偏微分方程式の解とその定常分布の構成である。特異確率偏微分方程式は近年盛んに研究されている話題であり、他の研究者は正則構造理論やパラ制御解析といった一般論を用いた研究を行っていた。一方、この研究ではこれらの一般論のアイデアだけを使った独自のアプローチを行うことにより、これらの理論の枠組みとは異なる形で方程式の解の構成を行った。この新しいアプローチの利点として明確な形で定常過程の構成ができることがあり、その成果の一部として量子場の構成に成功している。

研究成果の概要（英文）：In this research I tried to develop the stochastic analysis and other theories by the combination of them. In particular, by applying the methods in stochastic differential equations to nonlinear partial differential equations, I succeeded to construct the stochastic processes and its stationary measures generated by singular stochastic partial differential equations which appear in the constructive quantum field theory. This result yields a new method for the construction of quantum fields, and is worthful both in stochastic analysis and quantum mechanics.

研究分野：確率解析

キーワード：確率微分方程式 確率解析 確率偏微分方程式 ディリクレ形式

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

確率的な考察は抽象的な数学の問題に対して直感的なイメージを与えることがあり、このイメージが新しいアイデアの誕生につながることもある。そのため確率解析的手法は様々な分野で応用され、様々な分野で成果を上げている。特に偏微分方程式論と確率解析のそれぞれ手法を合わせることによる結果がたくさん知られており、この両方の手法を用いた研究は更なる発展が見込まれていた。

### 2. 研究の目的

偏微分方程式論と確率解析を結び付けることによって、双方の利点を生かして両方の理論を発展させることが本研究の目的であった。具体的には、偏微分方程式における結果の確率解析的な解釈や、非線形確率偏微分方程式における正則構造の理論の伊藤解析による解釈を用いて、非線形偏微分方程式の確率解析的アプローチによる研究を行うことを目的としていた。この研究では特に、量子力学における構成的場の理論で現れる確率量子化方程式に着目し、この非線形確率偏微分方程式に対して伊藤解析的な考え方を用いたアプローチを行うことによって、構成的場の理論における問題に対する新しい確率解析的なアプローチの方法を生み出すことを目標とした。

### 3. 研究の方法

この研究ではまず、構成したい量子場に当たる確率測度の確率量子化方程式を考えた。これは量子力学においてよく知られた手法であり、この操作により特異性をもつ非線形確率偏微分方程式が現れる。このような特異性の高い非線形確率偏微分方程式は、特異確率偏微分方程式と呼ばれ盛んに研究がなされている。この特異確率偏微分方程式を解くための手法として正則構造の理論やパラ制御解析などが知られており、この研究では様々な解析的手法が直接適用できるパラ制御解析の手法に近い形で方程式の変形を行った。しかし、この研究では伊藤解析のような確率解析において古くから知られた手法の適用を目指していることや、特定の量子場モデルの確率量子化から現れる方程式を考えているといった理由から、パラ制御解析の一般論に含まれないような問題を取り扱うこととなった。その結果、パラ制御解析の一般論自体は使わず、パラ制御解析で現れる方程式の変形だけを用い、その後現れる方程式に対しては個別の方程式の特徴を用いたアプローチ、特に昔から知られている確率解析の手法を用いて解析を行った。

### 4. 研究成果

この研究では、特異確率偏微分方程式による3次元ユークリッド空間での $\Phi_4$ 確率量子場の構成と、指数型確率量子場に対応する特異確率偏微分方程式を様々な手法で解くという、2つの大きな成果を上げることができた。これらは一般論では取り扱えないような特異確率偏微分方程式に対し、対象となる方程式や問題設定の特性を生かして個別の議論を行うことによって得られた結果である。以下でそれぞれについて説明を行う。

$\Phi_4$ 確率量子場の構成の研究では、まず3次元トラス上での $\Phi_4$ 測度とその流れの構成を行った。この $\Phi_4$ 確率量子場は量子力学において最も重要な量子場であり、これまで様々な研究がなされてきた。この研究では、近年発展している特異確率偏微分方程式の手法と従来からある確率解析の手法を融合することにより、明確な形で $\Phi_4$ 確率量子場の構成を試みたものである。特に量子場の相互作用の部分の平滑化により近似しているところが特徴である。これは従来の量子場の研究ではよく現れていたが、特異確率偏微分方程式の話題でこのような近似を行うのはこの研究が初めてであった。このような近似の設定を行い、さらに従来からある確率解析の手法を用いるため、正則構造の理論やパラ制御解析で現れる確率偏微分方程式とは異なるものを取り扱っている。実際、近似列に対し、ヘルダー連続な関数空間ではなく $L^p$ 空間を値にとるような確率過程の収束列を構成している。また、明確な形で確率量子場を構成するため、扱う近似列は定常過程を選んでいく。これらの設定は、従来の確率解析においてはしばしば現れていたが、正則構造の理論やパラ制御解析の一般論では扱えなかったものである。このようなアプローチを行うことにより、近似列の定常過程の収束を示すことができ、それにより $\Phi_4$ 確率量子場の構成に成功している。この研究では量子場の近似を行ってから確率量子化方程式を考えているため既存の $\Phi_4$ 測度の構成と近いものとなっており、特異確率偏微分方程式を用いた他の研究と比べて議論が簡素化されている。この研究成果は特異確率偏微分方程式における一般論ではないが、新しいアプローチの方法を確立したものと高く評価され、多数の数学者の論文で引用されている。

さらに、この手法を用いて3次元ユークリッド空間上でも同様の成果を上げることができた。3次元トラスは有限体積をもつが、ユークリッド空間全体は体積が無限となるため、トラス

の場合と比べて扱いが複雑になる。この特異確率偏微分方程式の解としてユークリッド空間上の関数値の確率過程を構成するためには、重み付きの関数空間を用意する必要がある。このように重み付き関数空間を使ってユークリッド空間上の特異確率偏微分方程式を扱う研究は多数存在していたが、それらは全てトーラスの一辺の長さを大きくしていくような極限を用いたものであった。しかし、この研究では $\Phi^4$ 測度の相互作用を局所化することによる議論を行っている。このような相互作用の局所化による3次元空間上の $\Phi^4$ 測度の近似は、特異確率偏微分方程式でない場合も含めてこれまでは無く、この研究において初めて成功したものである。このような手法をとることにより、 $\Phi^4$ 測度の近似列と対応する確率量子化方程式の近似列が共に回転不変となるような近似を選ぶことができる。そのためこの手法の利点として、構成した $\Phi^4$ 測度の回転不変性を示すことができる。 $\Phi^4$ 測度の回転不変性は、公理的場の理論では公理に含まれており、物理的観点から要請される性質である。この研究成果は構成的場の理論の観点から見ると、これまで得られていなかった公理を満たす $\Phi^4$ 確率量子場の構成に成功したことになる。また、他のいくつかの公理も先行結果と同様に示すことができる。回転不変性をもつような $\Phi^4$ 測度の構成は長い間難しい問題とされてきたが、この研究成果により明確な構成法が確立された。この研究成果の証明は、全体の流れとしてはトーラスの場合と同じであるが、関数空間に重みを付けなくてはならないことから途中で沢山の議論が追加で必要となっている。また、これも既存の正則構造の理論やパラ制御解析の一般論を適用できない問題設定となっているため、これらのアイデアを部分的に使い、全体としては独自の解析手法を用いている。

3次元トーラス上の $\Phi^4$ 確率量子場とその流れの構成に関する論文は既に学術雑誌に掲載され、3次元ユークリッド空間上の $\Phi^4$ 確率量子場とその流れの構成に関する論文は現在投稿中である。

次に、指数型確率量子場に対応する特異確率偏微分方程式に関する結果について説明を行う。この指数型確率量子場は指数量子場モデルや Høegh-Krohn モデルと呼ばれるもので、構成的場の理論においてよく知られたモデルである。この研究は、この指数量子場モデルに対応した確率量子化方程式を考え、その特異確率偏微分方程式を解くというものである。ここで現れる特異確率偏微分方程式は指数型の非線形項をもつため、やはり正則構造の理論やパラ制御解析といった一般論が使えない場合に当たる。この研究では、まず $L^2$ 空間の枠組みで研究を行った。このモデルの確率量子化方程式には指数型のウィック積が現れるが、 $L^2$ 空間の枠組みの場合はウィナーカオス展開を用いた計算ができ、特異性の計算が比較的簡単にできる。これと特異確率偏微分方程式の変形を用い、さらに非線形偏微分方程式の手法を用いて対応する確率量子化方程式の解の存在と一意性を示した。ここで、解の存在と一意性は特異確率偏微分方程式の意味であることを注意として述べておく。また、この解の存在と一意性では指数関数の特性を本質的に使っており、モデルに依存した解析方法をとっていることも注意として述べておく。この研究では、定常過程による近似列の収束や、ディリクレ形式により得られていたマルコフ過程との対応まで得られており、指数量子場モデルの確率量子化に関する他の研究成果との関係も明確にすることができた。

さらにこの研究では、 $p$ が十分1に近い場合の $L^p$ 空間の枠組みでも同様の結果を得ることができた。 $p$ を2より小さく選ぶ必要があるような枠組みのときの指数型のウィック積はもはやウィナーカオス展開を用いた計算ができないため、指数型のウィック積の構成自体が難しく、ガウス乗法カオスと呼ばれる1つの研究対象となっている。特に、 $p$ が十分1に近い場合の $L^p$ 空間の枠組みは、ガウス乗法カオスが非自明なものとして存在する限界の枠組みとなっている。これはつまり、本研究において限界まで広い枠組みでこの問題を解くことができたことを表している。この研究ではまず、このガウス乗法カオスの新しい構成法を与え、それを用いて $p$ が十分1に近い場合の $L^p$ 空間における特異性の度合いを求めた。その特異性の度合いから、確率量子化で現れる特異確率偏微分方程式の解が属するような適切な関数空間を知ることができ、その関数空間を用いて上で述べた $L^2$ 空間の枠組みの場合と同様の議論を行った。このガウス乗法カオスの属する関数空間がそれなりに良いものであったため、 $L^2$ 空間の枠組みでの議論を修正することによって、 $L^2$ 空間の枠組みで得たものと同じ結果を得ることができた。これは当初は想定していなかったことであり、驚くべき結果である。特に、ディリクレ形式を用いても解に当たる確率過程を構成することができており、先行結果を限界まで拡張するものとなっている。また、このガウス乗法カオスの新しい構成法自体も、先行結果における議論を大幅に簡略化かつ一般化するものとなっている。

$L^2$ 空間の枠組みにおける指数型確率量子場に対応する特異確率偏微分方程式に関する論文は既に学術雑誌に掲載され、 $p$ が十分1に近い場合の $L^p$ 空間の枠組みに関する論文は現在投稿中である。

この研究課題において得られた主な成果は以上のものである。この他にも、ランダム環境中のブラウン運動の再帰性などの研究成果も得ている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kim Daehong, Kusuoka Seiichiro	4. 巻 25
2. 論文標題 Recurrence of direct products of diffusion processes in random media having zero potentials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1~18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/20-EJP540	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Albeverio Sergio, Kusuoka Seiichiro	4. 巻 20
2. 論文標題 The invariant measure and the flow associated to the $\Phi^4_3$ -quantum field model	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 ANNALI SCUOLA NORMALE SUPERIORE - CLASSE DI SCIENZE	6. 最初と最後の頁 1359~1427
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2422/2036-2145.201809_008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hoshino Masato, Kawabi Hiroshi, Kusuoka Seiichiro	4. 巻 21
2. 論文標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\Phi)_2$ -quantum field model driven by space-time white noise on the torus	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 339~375
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-020-00583-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件（うち招待講演 14件/うち国際学会 13件）

1. 発表者名 楠岡誠一郎
2. 発表標題 回転不変な $\Phi^4_3$ 測度とその流れの構成
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 楠岡誠一郎
2. 発表標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\Phi)_2$ -quantum field model driven by space-time white noise on the torus in the full $L^1$ -regime
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 楠岡誠一郎
2. 発表標題 ユークリッド空間での作用不変な $\Phi^4_3$ 測度とその流れ
3. 学会等名 東北大学理学研究科数学専攻談話会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 One day workshop on stochastic analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 量子場の数理とその周辺 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Approach to the Quantum Field with Exponential Interactions by Singular SPDEs
3. 学会等名 Analysis, Random Fields and Integrable Probability (The 12th Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Approach to the quantum field with exponential interactions by singular SPDEs
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Approach to the quantum field with exponential interactions by singular SPDEs
3. 学会等名 Nonlinear and stochastic partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\Phi)_2$ -quantum field model driven by space-time white noise on the torus
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 Taiwan Mathematical Society Annual Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 The invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 Regularity Structures and Stochastic Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 The invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 9th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 The invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 Gaussian Free Fields and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 Quantum field theory, renormalisation and stochastic partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Recurrence of the Brownian motion in multidimensional semi-selfsimilar random environments
3. 学会等名 Workshop on Jump Processes and Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 The invariant measure and the flow associated to the $\Phi^3$ -quantum field model
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 楠岡誠一郎
2. 発表標題 The invariant measure and the flow associated to the $\Phi^3$ -quantum field model
3. 学会等名 第13回非線型の諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 The invariant measure and the flow associated to the $\phi^4$ -quantum field model
3. 学会等名 確率解析とその周辺 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 The invariant measure and flow associated to the $\Phi^4$ -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 異分野基礎科学研究所(RIIS) 第2回研究報告会 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 楠岡誠一郎
2. 発表標題 The invariant measure and flow associated to the $\phi^4$ -quantum field model
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 楠岡誠一郎
2. 発表標題 3次元トーラス上の $\phi^4$ 量子場モデルの不変測度とその流れ
3. 学会等名 Saga Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 楠岡誠一郎
2. 発表標題 3次元トラス上のPhi4量子場モデルの不変測度とその流れ
3. 学会等名 慶應確率論ワークショップ
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Seiichiro Kusuoka's webpage <a href="https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kusuoka/">https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kusuoka/</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ドイツ	ボン大学		