

令和 2 年 6 月 22 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14205

研究課題名(和文) 確率的に時間発展する平面領域を記述するためのレブナー理論の基礎的・応用的研究

研究課題名(英文) Fundamental and applied research on Loewner theory for describing planar domains growing stochastically

研究代表者

堀田 一敬 (Hotta, Ikkei)

山口大学・大学院創成科学研究科・准教授

研究者番号：10725237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：シュラムレブナー発展においては平面上を確率的に時間発展する曲線を用いて様々な統計モデルの臨界現象やフラクタル曲線の統計を等角写像で表現する。一方で確率的に時間発展する平面領域を等角写像で記述する試みは未だに成功例がない。申請者は前プロジェクト(若手(B), H26--H28)においてレブナー理論の基礎性質の整備を行った。この研究結果をベースとした上で、本研究課題では確率的に時間発展する平面領域の記述のための基礎研究および応用的研究を行う。

研究成果の学術的意義や社会的意義

レブナー理論は「拡がる」という自然な現象を数学的に特徴づけることから物理・工学・社会科学など様々な応用を持つ。特に2000年に提唱されたシュラム・レブナー発展により様々な2次元統計物理模型に理論的な裏付けが与えられ、研究は飛躍的に進んだ。レブナー理論を取り巻く研究は現代数学において最先端のトピックの一つであり、さらにレブナー理論はパーコレーション理論を通じて、ネットワークや噂の拡がりといった社会現象の理解にも関わりがある。このことから、同理論の発展は社会的にも大きな意義を持つ。

研究成果の概要(英文)：Schramm-Loewner Evolutions describe the scaling limit of a variety of two-dimensional lattice models in statistical mechanics. In the theory it is used a growing random curve to the upper-half plane. On the other hand, until today, it is not succeeded to describe randomly growing planar domain, as DLA, Eden's model and so on. In the previous project, we have investigated various fundamental properties on Loewner theory. Based on those results, in the current project we approach to the theory behind randomly growing planar domains vis Loewner theory.

研究分野：解析学基礎

キーワード：等角写像 レブナー理論 確率微分方程式 擬等角写像 シュラム・レブナー発展

1. 研究開始当初の背景

本研究課題は、レブナー理論と呼ばれる「像領域が時間発展する等角写像族」に関する理論の研究である。レブナー理論は 20 世紀には古典的函数論の理論として知られていた。しかし 2000 年に、パーコレーションやイジング模型といった様々な 2 次元統計物理モデルの記述に対して、レブナー理論が有効である事が発見された(Schramm, 2000)。以来、同理論は世界的な注目を浴びており、今や確率論・函数論・統計物理学を巻き込んだ一大理論へと発展している。まずレブナー理論について簡潔に説明する。

レブナー理論は、複素平面の単位円板上で定義された時間パラメータ付き等角写像と、それが満たす偏微分方程式に関する理論である。複素平面上の単連結領域が連続的に発展するとき、リーマンの写像定理により単位円板を発展領域へと写す「時間パラメータ付き等角写像」が存在する。これをレブナー関数と呼び、レブナー関数が満たす偏微分方程式をレブナー微分方程式という。

レブナー理論は「拡がる」という自然な現象を数学的に特徴づけることから、物理・工学・社会科学など様々な応用を持つ。その中でも決定的なのが、2000 年に提唱されたシュラム・レブナー発展 (Schramm-Loewner Evolution または SLE) である。SLE により、様々な 2 次元統計物理模型に理論的な裏付けが与えられ、研究は飛躍的に進んだ。2 名の数学者(Werner 2006, Smirnov 2010)が SLE に関連する研究によりフィールズ賞を受賞した事実も、その重要性を裏付けている。このように、レブナー理論を取り巻く研究は現代数学において最先端のトピックの一つである。さらにレブナー理論はパーコレーション理論を通じて、ネットワークや噂の拡がりといった社会現象の理解にも関わりがある。この事から、同理論の発展は社会的にも大きな意義を持つと考える。

2. 研究の目的

SLE においては、平面上を確率的に時間発展する曲線を用い、様々な統計モデルの臨界現象やフラクタル曲線の統計を等角写像で表現する。一方で、確率的に時間発展する平面領域を等角写像で記述する試みは、未だに成功例がない。申請者は前プロジェクト(若手(B), H26~H28)においてレブナー理論の基礎性質の整備を行い、採択論文 3 編・投稿中論文 5 編の結果を得た。この研究結果をベースとした上で、本研究課題では具体的に次のような事を明らかにする。

- (1) 【「レブナー関数」と領域発展を制御する「正則ベクトル場」の相互依存性】申請者の先行研究(Hotta:2016)により、レブナー方程式を制御する正則ベクトル場列の弱収束&プリコンパクト性から、レブナー関数列の局所一様収束性が得られる事が示された。また DelMonaco:2016 では、ある種のレブナー関数から対応する正則ベクトル場の確率測度の緊密性が得られる事がわかった。そこでさらに両者の依存性の研究をさらに推し進め、レブナー理論に対する変分法や正則運動等による解析の手法を確立する。
- (2) 【確率発展する平面領域を記述するための、各種アプローチ】確率的に拡がる単連結領域を像領域に持つレブナー関数を明示的に記述するのは非常に困難である。そこで、まずは幾何学的解析学の視点からいくつかの単純化した発展領域に的を絞り、どのようなレブナー方程式を与えればそのような領域が描けるかを調査する。また、それらの拡がり方が、どのような既存の結晶成長モデルに対応するのかも調査する。
- (3) 【種々の分野への応用研究】レブナー理論の発展は、それが統計物理・確率論に多大な貢献をするという事実の後押しされている。よって同理論が他分野にどのように影響するかを調査するのは非常に重要である。ここでは(1)(2)で得られた結果、また申請者によりこれまで得られた結果をさらに推し進めて、「タイヒミュラー理論」「自由確率論」「数値解析」の分野との親和性を調査する。

3. 研究の方法

- (1) レブナー理論の核である evolution family と正則ベクトル場の正則依存性を示し、「正則運動」の手法と「変分法」の理論を適用するための土台を構築する我々の目的は、確率的に変化するレブナー関数、およびその像領域を解析する事にある。そのためには、領域の発展を決定する正則ベクトル場との関係を調査し、本研究課題の問題を解決するための「武器」を作成する必要がある。Evolution family と正則ベクトル場は非自励形の微分方程式(コーシーの初期値問題)で相互に関係する。申請者はこれまでの研究で、正則ベクトル場と evolution family との連続依存性に関する結果を得てきた。そこでまずは両者に複素パラメータを導入しその連続依存性に関して調査し、それを他の問題へ応用する事を考える。

- (2) 「平面からスリットを除いた領域で単連結領域を近似する」というアイデアと、申請者により確立された「近似定理」を用い、確率的に時間発展する領域を像に持つ等角写像を記述する。
- 確率発展する平面領域を描くアイデアは次の通りである。複素平面から有限個の単純閉曲線で一方の端点が無限遠点にあるものを除いた領域で、原点を含む連結成分を多重スリット領域と呼ぼう。カラテオドリの核収束定理により、複素平面上の任意の単連結領域は多重スリット領域で近似することができる。この性質と(1)でも触れた近似定理を利用すれば、各スリットが独立に、確率的に短くなるような状況を考察すればよいことがわかる。
- 一般の場合を扱うのは大変難しい。そこでまずは、全てのスリットが半径方向に伸びる半直線の場合を考察する。これは、地球(単位円板)の地表にまっすぐ雪が降り積もるような現象を表す。この場合、レブナー微分方程式の Herglotz 関数はケーリー変換の総和で表されることがわかる。後は、各ケーリー変換とその重みがどのような条件を満たせば、対応する関数が半直線による多重スリット領域を描くかを調べる。さらに、スリットが対数螺旋の場合、つまり雪がある角度を持って地表に降り積もるモデルも調査したい。
- (3) (1)(2)で得られた結果の諸分野へのレブナー理論の応用を模索していく。
- まず Gumenyuk 氏と共同でレブナー微分方程式により普遍タイヒミュラー空間を定義する研究を進める。解決には(1)で得られた正則依存性と変分法、特に Slodkowski (1991)による正則運動の拡張定理の応用が有効であると期待している。
- Schleissinger 氏とは共同でレブナー微分方程式と自由確率論との関連性を調査する。レブナー関数により決定する Herglotz 関数は確率測度による積分表示を持つ。Schleissinger (arXiv, 2016)はある特定の型のレブナー関数と確率測度との相互の親和性を示した。この研究をさらに進め、他の型のレブナー関数にも同様の親和性が成り立つ事を調査する。
- 島内氏とは、レブナー関数による領域発展の可視化のプロジェクトを押し進める。これまでに一定のアルゴリズムの実装に成功したが、Herglotz 関数の形によっては誤差が増大してしまう事がわかった。この問題に対し(2)のスリットによる近似の手法、つまり Herglotz 関数に付随する測度のディラック測度による近似が有効であると考えている。

4. 研究成果

- (1) Del Monaco 氏および Schleissinger 氏と共に、Multiple Chordal SLE の極限分布に対応するレブナー関数の性質について調査した。先行研究ではスリットの重みが均一の場合の極限に関して調査されていたが、本研究では重みが異なる場合の境地関数の性質とそれが満たす微分方程式をもとめることができた。本結果は論文としてまとめられ、Comput. Methods Funct. Theory 18 (2018)に掲載された。
- (2) 中央大学の香取氏と共に、Multiple SLE の極限分布に対応するレブナー関数の性質について調査した。過去の研究では、実軸の 1 点から伸びる複数のスリットを記述する Multiple SLE のスリット本数を無限大にした場合の極限関数は(証明なしに)調べられていたが、2 点から伸びるスリット(つまり $2n$ 本のスリットの半分は a から、もう半分は $-a$ から伸びる)に対応する極値関数は知られていなかった。本研究ではこれを明らかにすることで、極値関数の形状を完全に記述することに成功した。本結果は論文としてまとめられ、J. Stat. Phys. (2018)に掲載された。
- (3) Michalski 氏と共に、有界正則関数に関する Shur の定理の精密化を行った。本結果は論文として投稿され、Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz, Ser. Rech. Deform. (2017)に掲載された。
- (4) 今までの集大成として、レブナー関数と擬等角拡張との関連性についてのサーベイ論文を執筆した。普遍タイヒミュラー空間は複数のモデルが知られているが、そのひとつとして擬等角拡張可能な単葉関数のシュワルツ微分全体の空間として定義できる事が知られている。その単葉関数の擬等角拡張判定方法としてレブナー方程式の理論は大変有用である。本論文では過去の研究と申請者のこれまでの研究をまとめあげた。本結果は Interdiscip. Inform. Sci. 25 (2019)に掲載された。
- (5) 2018 年に東北大学大学院情報科学研究科において第 2 回となるレブナー方程式の国際研究集会を主催した。本研究集会では前回に比べて多くの海外研究者(7名)、国内研究者(7名)に参加頂き、活発な議論をすることができた。また一変数関数論、多変数関数論、確率過程論、非可換確率論など多くの分野におけるレブナー方程式との関わりを参加者と共有することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ikkei Hotta	4. 巻 -
2. 論文標題 Loewner chains with quasiconformal extensions: an approximation approach	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Anal. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 HOTTA Ikkei	4. 巻 25
2. 論文標題 Loewner Theory for Quasiconformal Extensions: Old and New	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Interdisciplinary Information Sciences	6. 最初と最後の頁 1-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.4036/iis.2019.A.01	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Ikkei Hotta, Andrzej Michalski	4. 巻 67
2. 論文標題 Some remarks on Schur's theorem for bounded analytic functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform.	6. 最初と最後の頁 93-99
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Andrea Del Monaco, Ikkei Hotta, Sebastian Schleissinger	4. 巻 18
2. 論文標題 Tightness results for infinite-slit limits of the chordal Loewner equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Comput. Methods Funct. Theory	6. 最初と最後の頁 9-33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s40315-017-0205-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ikkei Hotta, Hirokazu Shimauchi	4. 巻 41
2. 論文標題 On a numerical algorithm for the solution of the radial Loewner equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Math. Methods Appl. Sci.	6. 最初と最後の頁 714-723
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1002/mma.4640	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikkei Hotta, Makoto Katori	4. 巻 171
2. 論文標題 Hydrodynamic Limit of Multiple SLE	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Stat. Phys.	6. 最初と最後の頁 166-188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s10955-018-1996-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 堀田一敬
2. 発表標題 レブナー方程式による擬等角拡張の構成について
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ikkei hotta
2. 発表標題 Problems Related to Conformal Slit-Mappings
3. 学会等名 Holomorphic Maps, Pluripotentials and Complex Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ikkei Hotta
2. 発表標題 Hydrodynamic limit of multiple SLE
3. 学会等名 International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ikkei Hotta
2. 発表標題 Tightness Results for Infinite-Slit Limits of the Chordal Loewner Equation
3. 学会等名 CMFT2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ikkei Hotta
2. 発表標題 Tightness results for infinite-slit limits of the chordal Loewner equation
3. 学会等名 25th ICFIDCAA (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 堀田一敬
2. 発表標題 Chordal Loewner chainsとその境界挙動
3. 学会等名 第60回函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ikkei Hotta
2. 発表標題 Problems related to conformal slit-mappings and non-commutative probability theory
3. 学会等名 Interactions between commutative and non-commutative probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ikkei Hotta
2. 発表標題 The Burgers-Loewner equation and free probability theory I and II
3. 学会等名 Mini-Workshop on Free Probability and Related Topic (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ikkei Hotta
2. 発表標題 Univalent functions with quasiconformal extensions: Becker's class and estimates of the third coefficient
3. 学会等名 Oberseminar Funktionentheorie (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>ホームページ等 http://cajpn.org/Loewner2018/ International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory 2018</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----