

令和元年6月10日現在

機関番号：32619

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2018

課題番号：17K14209

研究課題名（和文）確率微分方程式に付随する密度関数及び感応度の解析

研究課題名（英文）Analysis of density functions and sensitivities concerning stochastic differential equations

研究代表者

中津 智則 (Nakatsu, Tomonori)

芝浦工業大学・システム理工学部・助教

研究者番号：50732898

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000円

研究成果の概要（和文）：確率微分方程式の解に関する確率密度関数及び感応度の解析を行った。前者に関しては、確率微分方程式の解の離散時間最大値の確率密度関数の上・下からの評価、離散時間最大値の確率密度関数が連続時間最大値の確率密度関数に収束すること、連続時間最大値の確率密度関数が正であることと、解自体の確率密度関数との関係を示した。この結果をまとめた論文は国際雑誌に受理され、現在印刷中である。後者に関しては、係数が時間と空間に依存する確率微分方程式の解の連続時間最大値に依存する金融商品のリスクを計算する公式を導いた。また、この公式を具体的な金融商品に応用する為の表現を考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、従来はあまり十分に研究がなされていなかったが、応用上極めて重要である確率微分方程式の解の最大値に関する、理論・応用研究を行った。本研究は複雑な金融商品のリスク管理に応用可能な研究である。2008年に発生したリーマンショックが複雑な金融商品のリスクの未熟な扱いによって引き起こされたことを鑑みると、学術的（かつ客観的）立場から金融実務に繋がる研究を行えたことは、金融システムの安定への寄与という点で意義があると考えている。

研究成果の概要（英文）：Researches of probability density functions and sensitivities concerning solutions of stochastic differential equations have been done. Regarding the former, the author obtained lower and upper bounds of the density function of discrete time maximum of the solution. The author then proved that the density function of the discrete time maximum converges to that of the continuous time maximum of the solution. Finally, the author proved the positivity of the density function of the continuous time maximum, and a relationship between the density functions of the continuous time maximum and the solution itself. The paper on these results has been accepted for publication in an international journal.

Regarding the latter, the author obtained a formula to compute risks of financial products depending on maxima of the solution of stochastic differential equations with coefficients dependent on the time and space parameter. Some numerical techniques applied to the formula also have been derived.

研究分野：確率論

キーワード：確率微分方程式 離散・連続時間最大値 確率密度関数 リスク計算 モンテカルロシミュレーション

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

確率微分方程式(Stochastic Differential Equation、以下、SDE)とは、株価等の時間をパラメータに持つランダムな現象を記述する数学的手法の一つである。SDE は近年では学术界・実務界を問わず数理ファイナンスと呼ばれる応用数学などで用いられている非常に重要な研究対象である。本研究の研究対象である SDE の解の最大値及び、停止時刻は数理ファイナンスをはじめ様々な分野に応用されている。実際、SDE の解の最大値や停止時刻に依存した様々な金融商品が研究者、金融の実務家によって取り扱われている。その感応度は金融商品の内包するリスクを表し、確率密度関数の解析(確率密度関数の存在・表現・滑らかさ・上/下からの評価など)はそのリスク計算等に応用される。感応度及び、確率密度関数の解析には、部分積分公式(Integration by parts 公式、以下、IBP 公式)と呼ばれる公式が重要な役割を果たす。本研究の研究対象は様々な場面で応用がなされているが、まだ十分な学術的研究がなされているとは言えない状況であると言える。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、SDE の解の最大値や停止時刻に付随する確率変数に関する確率密度関数及び、感応度の解析である。それらの確率変数は数理ファイナンス等の応用分野において、特に重要なものである。確率密度関数及び感応度の解析は一般的に IBP 公式等を用いて行われるが、その解析法は一様ではなく研究対象ごとに考察する必要がある。本研究では、最大値や停止時刻に関する IBP 公式を導き、確率密度関数の性質の研究及び金融商品のリスク(感応度)計算に応用することを目的とする。

確率微分方程式に関する最大値や停止時刻は、その重要性にも関わらず十分に研究がなされておらず、本研究の成果は研究者に加え、金融の実務家にも注目されることが期待される。

### 3. 研究の方法

以下では(i)、(ii)をそれぞれ最大値、停止時刻に関する文章とし、必要に応じて(i)、(ii)に分けて記述する。

(i) SDE の解の時間最大値に対する IBP 公式は、Gobet and Kohatsu-Higa(2003)、Hayashi and Kohatsu-Higa(2013)や Nakatsu(2016)で導かれている。Gobet and Kohatsu-Higa(2003)では金融商品のデルタ及び、ガンマと呼ばれるリスク指標の計算に用いられ、Hayashi and Kohatsu-Higa(2013)と Nakatsu(2016)ではそれぞれ、確率密度関数の滑らかさ、上からの評価の証明に応用されている。本研究では、以上の結果を参考にし新たな結果を導く方向で研究を行う。最大値に関しては、IBP 公式を導くために Malliavin 解析と呼ばれる解析が有効であることが期待されるため、まずは Malliavin 解析を用いた IBP 公式を導くことを考え研究を行っていく。

(ii)停止時刻に関しては、(i)で記述した Malliavin 解析を適用することが難しいと考えられる。しかし、停止時刻に関する IBP 公式は Thalmaier(1997)や Delarue(2003)による測度変換を用いた方法が開発されており、この方法は数理ファイナンスにおける金融商品のリスク計算に応用可能であることが期待される。特に以上の既存結果をアメリカンオプションと呼ばれる、極めて複雑な金融商品のリスク計算に応用すべく拡張し、具体的は数値計算まで行う方向で研究を行う。

### 4. 研究成果

#### (i)最大値について

SDE の解の最大値の確率密度関数の研究として、確率微分方程式の解の離散時間最大値の確率密度関数の上・下からの評価、離散時間最大値の確率密度関数が連続時間最大値の確率密度関数に収束すること、連続時間最大値の確率密度関数が正であることと、解自体の確率密度関数との関係を示した。これらの結果をまとめた論文は国際誌 Journal of Theoretical Probability に受理され、現在印刷中である。

また、以上の研究に関連して新たな問題が現れた。それは離散時間最大値と連続時間最大値の確率密度関数の収束の早さに関する問題である。上記の論文では確率微分方程式の係数がある程度良い条件を満たせば、離散時間最大値の確率密度関数が連続時間最大値の確率密度関数に収束することが示されているが、収束の早さまでは得られていない。そこで、まず最も簡単なブラウン運動についてこの問題を考えた。現在のところはまだ結果が得られてはいないが、今後の研究の一つとして見据えている。

また、SDE の解の連続時間最大値に依存した金融商品のベガと呼ばれる感応度を計算する公式を導き、数値計算を行った論文が国際誌 Journal of Computational Finance に掲載された。

#### (ii)停止時刻について

アメリカンオプションのデルタと呼ばれるリスクを計算するための IBP 公式を導き、具体的な数値計算によりその公式の有用性を確認した論文が国際誌 Methodology and Computing in Applied Probability に掲載された。

また、バリアオプションと呼ばれる金融商品のリスク計算に関して新たな結果を得た。これは空間パラメータのみに依存する係数を持つ SDE を扱っている Gobet and Kohatsu-Higa(2003)の結果を、空間と時間両方に依存する係数を持つ SDE に拡張する結果である。この結果に関しては、残念ながら数値計算を行うまでは至らなかったが、効率よく数値計算を行う手法をいくつか考案することが出来たので、今後は数値実験を行い論文としてまとめていきたいと考えてい

る。

## 5 . 主な発表論文等

### 〔雑誌論文〕(計 3 件)

T. Nakatsu: Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations, Journal of Theoretical Probability, to appear.(査読有)

DOI: <https://doi.org/10.1007/s10959-019-00885-1>

T. Nakatsu: Volatility risk structure for options depending on extrema, Journal of Computational Finance 21(3) 105-122 (2017).(査読有)

DOI: 10.21314/JCF.2017.334

T. Nakatsu: An integration by parts type formula for stopping times and its application. Methodology and Computing in Applied Probability 19(3) 751-773 (2017).(査読有)

DOI: <https://doi.org/10.1007/s11009-016-9512-9>

### 〔学会発表〕(計 12 件)

“Integration by parts formula and probability density function”, The 3rd UOG-SIT Workshop in Pure/Applied Mathematics and Computer Science

“Integration by parts formulas for maxima of diffusion processes and applications”, Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019

“Integration by parts formulas for maxima of diffusion processes and applications”, 金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2018

「最大値に依存する金融商品のリスク計算について」, 日本応用数理学会 2018 年度年会

“Some Properties of Density Functions on Maxima of One-Dimensional Diffusion Processes”, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications

“Properties of density functions on maxima of one-dimensional diffusion processes”, Workshop on Local Limits for Galton-Watson Trees

“Stochastic analysis in finance and related topics”, The 2nd SIT-UOG workshop on pure/applied mathematics and computer science

“Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations”, 計量経済学ワークショップセミナー

“Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations”, 2017 年度確率論シンポジウム

“Some properties of density functions on maxima of one-dimensional diffusion processes”, 日本応用数理学会 2017 年度年会

“Some properties of density functions on maxima of one-dimensional diffusion processes”, 応用確率論 in 静岡

“Some properties of density functions on maxima of solutions to one-dimensional stochastic differential equations”, International Conference on Financial Risks and Uncertainties 2017

### 〔図書〕(計 0 件)

### 〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

### 〔その他〕

ホームページ等: <http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~t-nakatu/paper.html>

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

中津 智則 (NAKATSU, Tomonori)

芝浦工業大学・システム理工学部・助教

研究者番号(8桁): 50732898

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。